سلطنة عمان - وزارة التربية والتعليم
المديرية العامة للتربية والتعليم بمحافظة شمال الباطنة
دائرة تنمية الموارد البشرية - قسم العلوم التطبيقية - وحدة الرياضيات

كراسة الطالب التدريبية

في الرياضيات

الصف: الثاني عشر بحتة، الوحدة: الثانية

(التفاضل وتطبيقاته)

الفصل الدراسي الأول

٢٠١٧/ ٢٠١٨م

إعداد/ مريم سعيد خزام المعمري ، مدرسة المؤمنة للبنات (١٠ – ١٢)

خديجة محمد الشحي و شيخة سعيد الكعبي، مدرسة شناص للبنات (١٠ – ١٢)

المقدمة:

الحمد لله الذي علم بالقلم، علم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على النبي الأكرم، الذي لم يكتب بقلم، وقاد الأمة لأعلى المراتب والقمم.

يعتبر التدريب من الطرق الفاعلة في تحسين ورفع التحصيل الدراسي للطلبة، فهو الوسيلة الرئيسة لتعليم المهارة واكتسابها وتطويرها، كما أن التدريب الموزع على فترات والمتواصل يساعد على بقاء جزء كبير من المعلومات السابقة، ويساعد الطالب على فهم الأفكار والمفاهيم فهما واعيا مما يحقق الدقة ويزيد الكفاءة ويجنب الأخطاء، فمثلا يمكن أن يتعلم الطالب كيفية إجراء القسمة المطولة عن طريق تقليد أستاذه ولكن من خلال التدريب والممارسة يمكنه أن يحسن من قدرته على إجراء القسمة المطولة ويصبح قادرا على إيجاد الحل الصحيح بسرعة ودقة واتقان. لذا فالتدريب يعزز من ثقة الطالب بنفسه ويزيد الدافعية لديه ويطور اتجاهاته الايجابية نحو التعلم.

وتأكيدا على ما سبق واستمرار لاهتمام وحدة الرياضيات بمحافظة شمال الباطنة بتعزيز واثراء مناهج المادة تم اعداد كراسة تدريبية للطالب في وحدة التفاضل وتطبيقاته للصف الثاني عشر بحتة، وقد تضمنت هذه الكراسة ما يلي:

١. مفردات اختبارية شاملة جميع الدروس مع حلولها من أسئلة الاختبارات النهائية الموجودة في زاويتي والتي تناولت الوحدة.
٢. اختبارا للوحدة يفيد الطالب في المراجعة النهائية على الوحدة.
٣. ملحق لتوضيح خطوات حل جميع المفردات الموضوعية المتضمنة في الكراسة.

آملين أن يحقق هذا العمل الأهداف المنشودة منه وأن يكون مرجعا مساندا للطلبة في دراسة الوحدة وتحقيق مخرجاتها. سائلين الله العلي القدير أن ينفعنا بما علمنا وأن يعلمنا ما ينفعنا، والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل.

فريق العمل

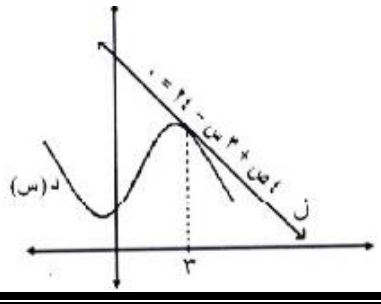
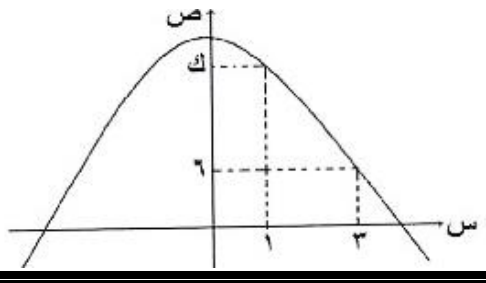
الدرس الأول: الاشتقاق

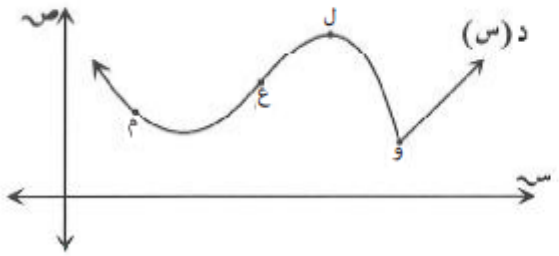
أولا: ملخص الدرس:

لقد تعلمت في هذا الدرس:

١- تعريف كل من (التغير-متوسط معدل التغير –معدل التغير)
٢- ايجاد مشتقة دالة معطاة باستخدام تعريف المشتقة
٣- استخدام التفسير الهندسي والفيزيائي لمفهوم المشتقة (الميل – والسرعة-والتسارع)
٤- بحث العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق

ثانيا: الأسئلة الموضوعية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول ١) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) حيث المستقيم ل مماسا للمنحنى عند س=٣ فإن د'(٣) تساوي :  أ) $\frac{-٤}{٣}$ ب) $\frac{-٣}{٤}$ جـ) صفر د) $\frac{١٥}{٤}$
٢	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور أول أ) إذا كان متوسط معدل التغير للدالة د(س) عندما تتغير س من ١ إلى م يساوي ٢ ، ومقدار التغير في الدالة يساوي ٦ ، فإن قيمة م تساوي : أ) ١٣ ب) ٤ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٤}{٣}$
٣	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني ا الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) ، فإذا كان متوسط معدل التغير يساوي - ٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ فإن قيمة ك تساوي :  أ) ١١ ب) ١٢ ج) ١٣ د) ١٤
٤	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كان د(س) = ٣ – ٢ س ، وتغيّرت قيمة س من ١ إلى ٣ ، فإن متوسط معدل تغير الدالة يساوي: ☐ -٢ ☐ $\frac{-١}{٢}$ ☐ $\frac{١}{٣}$ ☐ ٢

٥	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول متوسط تغيّر الدالّة د(س) = $-٣\|س - ٣\|$ في الفترة [١، ٢] يساوي: ٣ ☐ ١ ☐ ١- ☐ ٣- ☐
٦	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني إذا كان متوسط التغير في الدالة د (س) في الفترة [٣ ، أ] يساوي ٢ وكان د(٣) = ٥ ، د(أ) = ٩ فإن قيمة أ تساوي : ٤ ☐ ٥ ☐ ٩ ☐ ١٠ ☐
٧	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س) ، فإن النقطة التي يكون عندها د'(س) < ٠ هي :  و ○ ل ○ ع ○ م ○
٨	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا كان د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٧ ، ٠ \leq س < ٢ \\ س - ٥ ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$ ، فإن متوسط معدل التغير عندما تتغير س من ١ إلى ٣ تساوي : ٢ ☐ ٣ ☐ ٤ ☐ ٦ ☐
٩	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول متوسط معدّل التغير للدالة هـ(س) = -٧ بين س = ١ ، س = ٥ يساوي : -٢٨ ☐ -٧ ☐ صفر ☐ ٤ ☐

ثالثا: الأسئلة المقالية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول ١) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٥س & ، س \geq ١ \\ ٦ - س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$ منصلة على $ح$ فأوجد $د'(١^{+})$ المشتقة اليمنى) باستخدام التعريف .
٢	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني ١) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س > ١ \\ س + ١ & ، س \leq ١ \end{cases}$ متصلة على $ح$ فأوجد $د'(١^{-})$ (المشتقة اليسرى) باستخدام التعريف.
٣	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني اذا كانت د (س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ٨س - ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها، فابحث قابلية الاشتقاق للدالة د (س) (باستخدام تعريف المشتقة) عند س = ٢
٤	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا كان $د(س) = س^{٢} + ٣$ ، فأوجد متوسط معدّل التغير للدالة د(س) في الفترة $[-٣، ٢]$.
٥	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني إذا كانت ق(س) متصلة على $ح$ حيث ق(س) = $\begin{cases} س^{٤} + ٥ & ، س > ١ \\ ٢س^{٢} + ٤ & ، س \leq ١ \end{cases}$ ، فأوجد: أ) متوسط مُعدّل التغير للدالة ق(س) عندما تتغير س من صفر إلى ٣ . ب) مُعدّل التغير للدالة ق(س) عند س = -٢ .

الدرس الثاني: قواعد الاشتقاق

أولا: ملخص الدرس:

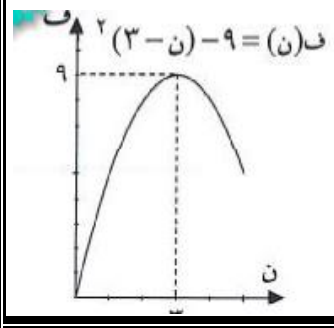
لقد تعلمت في هذا الدرس:

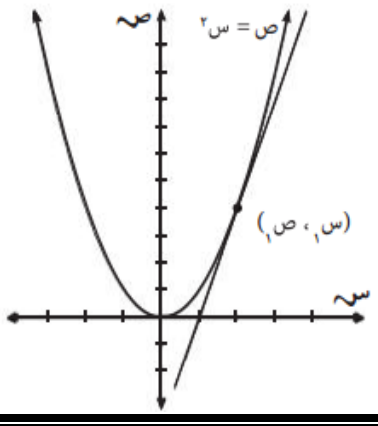
١- استنباط قاعدة عامة لإيجاد المشتقة عندما تكون ص = س^{ن} واستخداماتها
٢- ايجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين او اكثر
٣- ايجاد مشتقة خارج قسمة دالتين
٤- اشتقاق الدوال المركبة قاعدة السلسة
٥- ايجاد مشتقة الدوال الضمنية
٦- ايجاد المشتقات العليا
٧- ايجاد ميل المماس وميل الخط العمودي عليه لمنحنى وايجاد معادلة كل منهما

ثانيا: الأسئلة الموضوعية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني يتحرك جسيم حسب العلاقة ع(ن)= ٣ن^{٢}- ٢ ن حيث ع: السرعة بالسنتيمتر/ الثانية ، ن: الزمن بالثواني، فإن التسارع اللحظي عند ٢ ثانية يساوي : أ) ١٠ ب) ٨ ج) ٦ د) ٤
٢	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني إذا كانت هـ (س) قابلة للاشتقاق على ح ، ق (س) = $\frac{١ + هـ(س)}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، هـ (-١) = ٢، هـ′(-١) = ٣ ، فإن ق′(-١) تساوي : أ) ٦ ب) ٢ ج) -٢ د) -٦
٣	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني إذا كانت د′(س)= ٢س^{٤} ، فإن نهـا $\frac{د'(س+هـ) - د'(س)}{هـ}$ = هـ ← ٠ أ) ٢س^{٤} ب) ٨ س^{٣} ج) ٢٤ س^{٢} د) ٤٨ س
٤	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س) وكان $\frac{د ع}{د ص}$ = ٤ ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٢ ، فإن (ص ٥ ع)′(س) = أ) $\frac{١}{٨}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) ٨

٥	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} – ن^{٢} حيث ف : المسافة بالسنتيمتر ، ن: الزمن بالثانية ، فإن سرعته اللحظية عند ٢ ثانية تساوي : أ) ٤ ب) ٦ جـ) ٨ د) ١٠
٦	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول) إذا كانت هـ (س) قابلة للإشتقاق على ح ، ق(س) = ٥ – ٤س×هـ (س) ، بحيث أن هـ (٢) = ٣ ، هـ′(٢) = -١ فإن ق′ (٢) تساوي : أ) - ٨ ب) -٤ جـ) ٤ د) ٨
٧	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول) إذا كانت $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ = س^{٢} +٣س فإن د″(١) تساوي : أ) صفر ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥
٨	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت د(س) = ١ – س^{٣} فإن $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{٢هـ}$ = -١٢ ☐ -٦ ☐ ٦ ☐ ١٢ ☐
٩	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت د(س) = { ٢س^{٣} + ٤ ، س > ١ ؛ ٦س ، س ≤ ١ } قابلة للاشتقاق عند س=١، فإن د′(٢) تساوي: ٦ ☐ ١٢ ☐ ٢٠ ☐ ٢٤ ☐
١٠	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} – س + ٣ عند س = ٢ يساوي: ٣ ☐ ٥ ☐ ٦ ☐ ٧ ☐
١١	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا تدحرجت كرة من أعلى جبل بحيث تكون المسافة التي قطعتها بالأمتار عن نقطة البداية بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ف = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} – ن^{٢} + ٢ ، فإن سرعتها تبلغ ٨ م/ث عندما ن تساوي: ١ ☐ ٢ ☐ ٣ ☐ ٤ ☐

١٢	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كانت د$'$(س) = $\frac{١}{٢}$ أ س^{٢} وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د'(٤ + هـ) - د'(٤)}{هـ}$ = ٨ فإن قيمة أ تساوي: ١ ○ ٢ ○ ٤ ○ ٨ ○
١٣	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كانت ص = ٢ن^{٣} − ٤ ، س = ن^{٢} فإن $\frac{ك^{٢}ص}{كس^{٢}}$ عندما ن = ٢ تساوي : $\frac{٣}{٤}$ ○ $\frac{٣}{٢}$ ○ ٣ ○ ٦ ○
١٤	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول  ٥) الشكل المجاور يمثل حركة جُسَيْم وفق دالّة المسافة ف (ن)، حيث ن الزمن بالثواني. السرعة اللحظية عند ٣ ثواني تساوي: ٩ ○ ٦ ○ ٣ ○ صفر ○
١٥	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول إذا كانت د(س) = س^{٢} + س ، هـ (س) = س − ١ ، فإن (د ○ هـ)$'$(س) = س^{٢} + س − ١ ○ س^{٢} − س ○ ٢س + ١ ○ ٢س − ١ ○
١٦	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول إذا كان ص = ل^{٢} − ٣ ، ل^{٢} = ٥ − س ، فإن $\frac{ك ص}{ك س}$ تساوي: −٢ل ○ ٢ل ○ −١ ○ ١ ○

١٧	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول إذا كان د(١) = ٣ ، د`(١) = ٦ ، فإن $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{٢} + ٤هـ}{د(١ + هـ) - د(١)}$ تساوي: $\frac{٢}{٣}$ ○ $\frac{٤}{٣}$ ○ ١٢ ○ ٢٤ ○
١٨	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني في الشكل المجاور ميل المماس لمنحنى الدلة ص = د(س) عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) يساوي :  س$_{١}^{٢}$ ○ ٢س$_{١}^{٢}$ ○ س$_{١}$ ○ ٢س$_{١}$ ○
١٩	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني إذا كان $\sqrt{ص}$ = ١ - س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢(س - ١) ○ ٢(١ - س) ○ (س - ١) ○ (١ - س) ○
٢٠	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني إذا كان د`(س) = هـ (٢س) ، هـ`(٢) = -٢ فإن د`(١) = ٤ ○ ٢ ○ -٢ ○ -٤ ○
٢١	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا كانت ص = م^{٣} + ٤م + ٥ ، م = ٩ - س ، فإن قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عندما م = ١ تساوي: -٧ ○ -٣ ○ ٣ ○ ٧ ○

٢٢	٢٠١٣-٢٠١٤ دور أول إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح، وكان Δص لها يساوي ٣هـ س^{٢} + ٣هـ^{٢} س + ٨هـ س + هـ^{٣} ، Δس = هـ ، فإن د$'$(٢) تساوي: ○ صفر ○ ١٤ ○ ٢٨ ○ ٣٤
٢٣	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا تحرك جسيم وفق دالة المسافة ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} − ٢٧ن + ٣ ، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني ، فإن معدّل التغير في سرعته عندما ن = ٤ يساوي : ○ ٣١ ○ ٢٤ ○ ٦ ○ ٣
٢٤	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + ٣ ، هـ(١) = −٢ ، هـ$'$ (١) = ٥ ، (ق ○ هـ)$'$ (١) = ٢٠ ، فإن قيمة أ تساوي: ○ −٥ ○ −١ ○ ١ ○ ٥
٢٥	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول إذا كانت ل(٢س) = س × هـ$'$ (س) ، ل(−٢) = ل$'$ (−٢) = ٣ ، فإن هـ$''$ (−١) = ○ ٩ ○ ٦ ○ −٦ ○ −٩
٢٦	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا علمت أن ق$'$(٣) = −٨، فإن $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{٧هـ}$ ▭ $-\frac{٨}{٧}$ ▭ $-\frac{٧}{٨}$ ▭ $\frac{٧}{٨}$ ▭ $\frac{٨}{٧}$

٢٧	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ٦ن^{٢} + ٣٤ ، ن ≤ ٠، فإن المسافة التي يقطعها الجسيم عندما ينعدم تسارعه تساوي: ☐ ٣٤ ☐ ١٨ ☐ ٤ ☐ ٢
٢٨	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا كانت ق(س) = س^{٢} + س ، وكان (هـ ○ ق)$'$(٢) = ٥٥ ، فإن هـ$'$(٦) = ☐ $\frac{٥٥}{٦}$ ☐ ١١ ☐ $\frac{٥٥}{٤}$ ☐ ٥٥
٢٩	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا كانت د(س) = أ س^{٤} − ٥س^{٢} + ٦ ، وكان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د''(٢ + هـ) - د''(٢)}{هـ}$ = ٤٨ ، فإن قيمة أ تساوي: ☐ ١ ☐ ٢ ☐ ١٢ ☐ ٢٤
٣٠	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول إذا كانت ق(س) = م^{٤}س^{٢} ، حيث م عدد حقيقي ، فإن ق$''$(س) تساوي : ☐ ٢م^{٤} ☐ ٢٤ م^{٢} ☐ ١٢م^{٢} س^{٢} ☐ ٢م^{٤} س
٣١	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول إذا كانت د(س) = س^{٢} + ١ ، فإن (د ○ د)$'$(−١) تساوي : ☐ ٤ ☐ ٢ ☐ −٢ ☐ −٨
٣٢	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول لتكن العلاقة بين سرعة جسيم ع(ن) ، والمسافة المقطوعة ف(ن) خلال الزمن ن هي ٣(ع(ن))^{٢} = ٥ ف (ن) + ٤ ، ع(ن) ≠ صفر ، فإن تسارع الجسيم يساوي : ☐ ٦ ☐ ٥ ☐ $\frac{٥}{٣}$ ☐ $\frac{٥}{٦}$

٣٣	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني إذا كانت ص = (٣س + ١)^{٢} ، فإن $\frac{د ص}{د س}$ تساوي: ☐ ٢(٣س + ١) ☐ ٦س + ١ ☐ ٦(٣س + ١) ☐ ٣س + ١
٣٤	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني ميل المستقيم العمودي على مماس منحنى الدالة د(س) = س^{٢} — س عند النقطة (١، ٠) يساوي: ☐ ٢- ☐ ١- ☐ ١ ☐ ٢

ثالثا: الأسئلة المقالية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول إذا كانت ص^{٢} = ٥ س + ص اثبت ص$''$ = $\frac{٥٠}{(١-٢ص)^{٣}}$
٢	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول أوجد النقاط التي يكون عندها المماس للمنحنى ص = س(س - ١)^{٢} موازياً لمحور السينات.
٣	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت د(س) = $\frac{(هـ(س))^{٣}}{ل(س)}$ حيث ل(س) ≠ ٠ ، وكانت هـ(س) = $\sqrt{٧}$س^{٣} + ٢س ، ل (س) = ٢س + ٢ فأثبت أن د$'$(س) = $\frac{٣}{٢}$ هـ (س) - $\frac{٢(هـ(س))^{٣}}{(ل(س))^{٢}}$
٤	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كانت د(س) = س^{٣} - س^{٢} - ١ ، هـ(س)= ٢س - ١ فأثبت أن (د ه هـ)$'$(١) = ٢
٥	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كانت ص = $\sqrt{٧}$ ٣س^{٢} + ٤ ، ل = (٢ + ٢س)^{٢} فأثبت أن: ٨ + $\frac{د ص}{د س}$ × ص + ٥س - $\frac{د ل}{د س}$ = ٠

٦	٢٠١١-٢٠١٣ دور اول إذا كان ص^{٢} – س ص = ١ ، فأثبت أن (٢ ص – س)^{٣} ص$''$ – ٢ = ٠
٧	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني إذا كانت (س ص + ١)^{٢} س ص = ١ فاثبت أن : ص + س ص$'$ = ٠
٨	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني أوجد معادلة العمودي على مماس المنحنى ص^{٢} + ص – ٢س = ٤ عند النقطة (١، ٢) .
٩	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني إذا كان ص = $\frac{٢س + ٥}{٣س + ٤}$ ، س ≠ $\frac{-٤}{٣}$ ، ، فأثبت أن ٢ص$'$ ص$''$ = ٣(ص$''$)^{٢}
١٠	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول أوجد ميل المماس للدالة ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + س + ١ عند النقطة (١ ، ٤) .
١١	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول إذا كانت ص^{٢} — ٢س ص = –٣ ، فأوجد ص$''$ عند ص = ٣ .
١٢	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني إذا كانت ص^{٢} = س ص ، فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$.
١٣	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني ٢٠) إذا كان ق$'$(٣) = ٨ ، فأوجد: نهـــا$_{م \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(٣ + ٢م) — ق(٣ — م)}{م}$
١٤	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني يتحرك جسيم وفق الدالة ف(ن) = ٢ن^{٣} — ٩ن + ١٥ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني. أوجد تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة.
١٥	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني إذا كانت د(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، ل(س) ≠ صفر، بحيث أن هـ$'$(س) ، ل$'$(س) دالتين قابلتين للاشتقاق على مجالهما، وكان د$'$(٢) = د$''$(٢) = صفر . أثبت أن: د(٢) = $\frac{هـ''(٢)}{ل''(٢)}$.

الدرس الثالث: المعدلات الزمنية المرتبطة، والقيم القصوى وتطبيقاتها

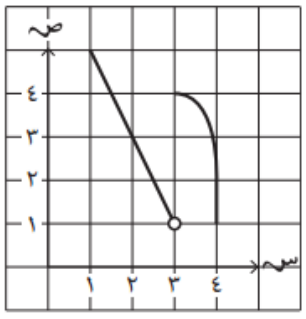
أولا: ملخص الدرس:

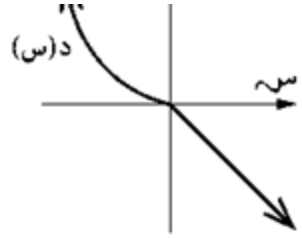
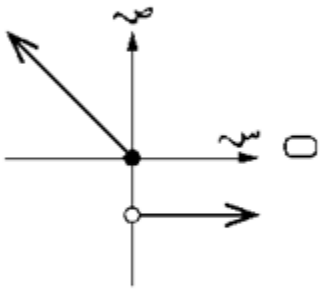
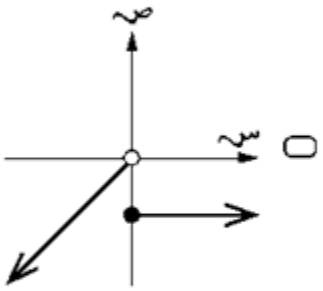
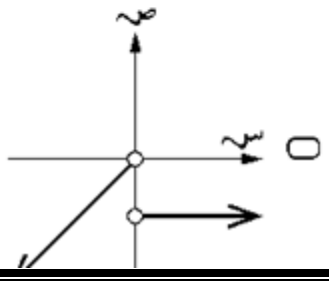
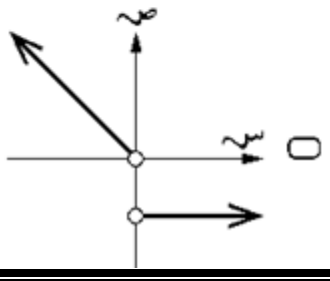
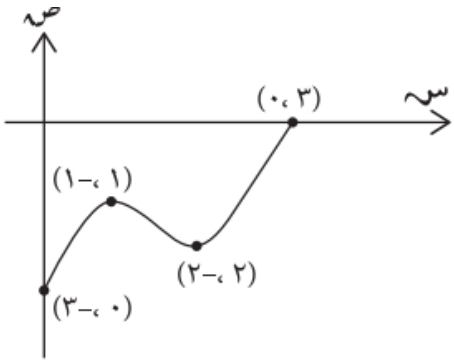
لقد تعلمت في هذا الدرس:

١- حل مسائل وتطبيقات حول المعدلات الزمنية المرتبطة
٢- تحديد فترات التزايد والتناقص
٣- تعريف النقاط الحرجة وايجادها
٤- تحديد طبيعة النقاط الحرجة (البحث عن القيم القصوى المحلية والمطلقة)
٥- حل مسائل وتطبيقات حول القيم القصوى المحلية

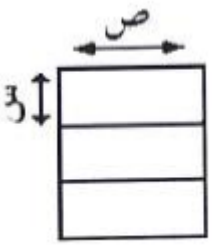
ثانيا: الأسئلة الموضوعية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول ١) إذا كانت د(س) = ٣-(س-٢)^{٢} فإن للدالة قيمة عظمى مطلقة في [-١ ، ٣] عند س تساوي : أ) -١ ب) صفر جـ) ٢ د) ٣
٢	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني إذا كانت د(س) =(س-٢)^{٢}+٢ فإن للدالة قيمة صغرى مطلقة في [-١، ٣] عند س تساوي: أ) ٣ ب) ٢ ج) صفر د) -١
٣	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول عند إلقاء حجر في بركة ماء تحدث موجات دائرية يزداد طول نصف قطر كل منها بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث، فالمعدل الذي تزداد به مساحة سطح إحدى الموجات التي طول نصف قطرها ٢م بوحدة (م^{٢}/ث) يساوي: ○ π ○ π٢ ○ π٤ ○ π٨
٤	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت ص = س^{٣} + ٣س + ٢ ، ل = س^{٢} - ١ فإن $\frac{ص}{ل}$ عندما س = ١ يساوي: ○ ٢ ○ ٣ ○ ٦ ○ ١٢
٥	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت د(س) = $\frac{س}{١ + س}$ ، س ≠ -١ فإن للدالة د(س) : ○ نقطة حرجة واحدة ○ نقطتين حرجتين ○ ثلاث نقاط حرجة ○ ليس لها نقاط حرجة

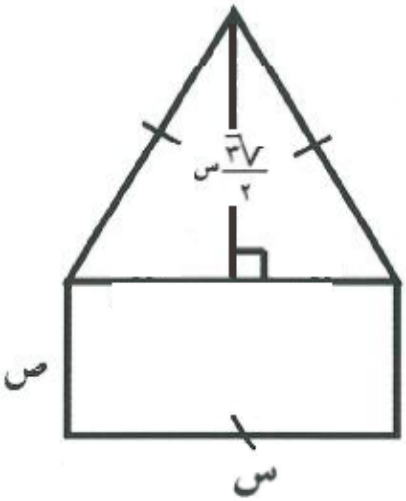
٦	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول إذا كانت ق(س) = { س^{٣} − ٥ ، س < ٠ ؛ ٢س^{٢} ، س ≥ ٠ } ، فإن ق(س) متزايدة في الفترة: ▭]−∞، ٠[▭]$\sqrt{٥}^{٢}$، ∞[▭]٠، ∞[▭ ح
٧	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إذا كانت د(س) = $\frac{س}{س - ٢}$ ، س ∈ [−٢، ١] فإن القيمة الصغرى المطلقة للدالة د(س) تكون عندما س تساوي: ▭ −٢ ▭ −١ ▭ صفر ▭ ١
٨	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول إذا كانت د$'$(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س}$ ، فإن جميع قِيَم س التي توجد عندها نقاط حرجة للدالة د(س) هي: ▭ {٠} ▭ {٢، −٢} ▭ {٢، ٠، −٢} ▭ {٤، ٢، ٠، −٢}
٩	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني عدد النقاط الحرجة لدالة د(س) = ٢(س − ٥) تساوي: ▭ صفر ▭ ١ ▭ ٢ ▭ ٥
١٠	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني الشكل المجاور يمثل بيان الدالة (س) المعرّفة على الفترة [١، ٤]، فإن النقطة (٣، ق(٣)) هي نقطة:  ▭ عظمى مطلقة ▭ صغرى مطلقة ▭ صغرى محلية ▭ عظمى محلية
١١	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول إذا كانت ق(س) كثيرة حدود حيث أن ق(س) = س^{٣} + هـ (س) ، وكان للدالة ق(س) قيمة قصوى محلية عند س = − ٢ ، فإن هـ$'$(−٢) تساوي : ▭ −١٢ ▭ −٢ ▭ صفر ▭ ٨

١٢	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول ١٠) الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة د (س) ، فإن الشكل الذي يُمثل بيان د َ(س) هو :     
١٣	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني إذا كان الشكل المقابل يُمثِّل بيان الدالة ل(س) في الفترة [٠ ، ٣] ، فإن القيمة العظمى المطلقة للدالة في هذه الفترة تساوي: ☐ ٣ ☐ صفر ☐ ١ - ☐ ٣ - 
١٤	٢٠١٤-٢٠١٥ دور ثاني تتحرك نقطة على منحنى الدالة ص = س٢ + ٣س — ٤ ، فإن قيمة ص التي يتساوى عندها مُعدَّل تغيُّر الإحداثي السيني بالنسبة للزمن مع مُعدَّل تغيُّر الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن هي: ☐ $\frac{-٢٧}{٤}$ ☐ ٦ - ☐ $\frac{-٣}{٢}$ ☐ ١ -

ثالثا: الأسئلة المقالية:

م	السؤال
١	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول ١) يتم حصاد حبوب القمح من الحقول بواسطة الآلات ، فإذا كانت الحبوب تتساقط من فوهة إحدى الآلات بمعدل $\frac{\pi ٤}{٣}$ م^{٣} / د مكونة مخروط دائري قائم قطره يساوي ثلاثة أمثال ارتفاعه. أوجد معدل التغير في ارتفاع المخروط عندما يكون الارتفاع ٢ م . (حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع)
٢	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني  صاحب مزرعة لديه سلك طوله ٦٠٠م ، يريد أن يقسم به ثلاث مناطق زراعية مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة في مزرعته كما هو موضح في الشكل . أوجد أكبر مساحة للمنطقة الواحدة يمكن أن يستخدم فيها السلك
٣	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور ثاني اذا كانت د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - ٦ س فأوجد : ١) فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) . ٢) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.
٤	٢٠٠٨-٢٠٠٩ دور اول ١) يصب عطر في زجاجة على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها يساوي ثلث إرتفاعها ، فإذا كان معدل إنسياب العطر في الزجاجة هو ٠,٨ سم^{٣} / ث . أوجد معدل ارتفاع مستوى العطر في الزجاجة عندما يكون ارتفاعه ٢سم . (حجم الإسطوانة ح = π نق^{٢} ع)
٥	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول مضمار للجري على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ، إذا كان محيطه ٤٠٠م ، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

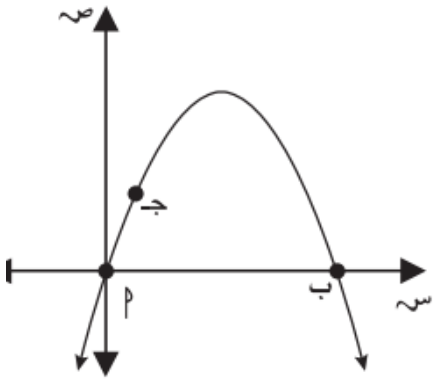
٦	٢٠١١-٢٠١٢ دور اول أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س - ١ & ، \quad س \geq ٠ \\ -(س - ١)^{٢} & ، \quad ٠ < س < ٢ \\ س - ٣ & ، \quad س \leq ٢ \end{cases}$
٧	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل ، طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٦ سم يتسرب من رأسه الماء بمعدل ٣ سم٣/ث . أوجد معدل تغير ارتفاع سطح الماء عندما يكون ارتفاع الماء فيه يساوي ٤ سم، (علماً بأن حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع).
٨	٢٠١١-٢٠١٢ دور ثاني أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\begin{cases} س + ٢ & ، \quad س > ١ \\ ٤ - س^{٢} & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$
٩	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول عيّن فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س^{٢} .
١٠	٢٠١٢-٢٠١٣ دور اول يُراد صناعة علبة زجاجية أسطوانية الشكل ذات غطاء معدني لتكون سعتها ٩٦ π م^{٣}. إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد من الزجاج ريالين وهي ضعف تكلفة المعدن ، فأوجد ارتفاع العلبة (ع) ونصف قطرها (نق) لتكون تكلفة صناعتها أقل ما يمكن. (علماً بأن مساحة الأسطوانة = ٢ π نق ع +٢ π نق^{٢}، حجم الأسطوانة = π نق^{٢}ع)
١١	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني إذا كان المنطاد (أ) يبعد عن المنطاد (ب) بمسافة أفقية قدرها ٤ م، انطلقا المنطادان (أ) و (ب) رأسيا إلى الأعلى بسرعة ٢ م / ث ، ١ م / ث على الترتيب . أوجد معدل التغير في المسافة بين المنطادين بعد مرور ٣ ثوان من بدء الانطلاق.
١٢	٢٠١٢-٢٠١٣ دور ثاني أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢ س وحدد نوعها .

١٣	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول ١٨) دائرتان متحدتان في المركز، نصفا قطريهما ٦ سم ، ٢٤ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدّل ٢ سم / ث ، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدّل ٤ سم / ث ، أوجد معدّل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر كل منهما مساوياً ١٢سم . (علماً بأن مساحة الدائرة = π نق^{٢})
١٤	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول ٢٠) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متطابق الأضلاع كما هو موضح بالشكل ، إذا علمت أن محيط النافذة يساوي $(١٢ - ٢\sqrt{٣})$ متر، فأوجد بعدي المستطيل لتكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن . 
١٥	٢٠١٣-٢٠١٤ دور اول) أوجد النقاط الحرجة في مجال الدالة: د(س) = س^{٣} − ١٢س .
١٦	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني **أنبوب من الحديد على شكل أسطوانة دائرية قائمة مجوف طوله ثابت ونصف قطريه الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم الحديد ثابت فإذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم / د أوجد معدل التغير في قطره الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٨ سم ونصف القطر الخارجي ١٠ سم . (علما بأن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق^{٢} × ع)**
١٧	٢٠١٣-٢٠١٤ دور ثاني **عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} − ٩س + ٦ .**

١٨	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول مصنع يبيع عدد س من الطابعات في الشهر بسعر (٨٤٠ — ١٠ س) ريالًا عمانيًا للطابعة الواحدة. إذا كانت التكاليف الكلية الشهرية لهذه الطابعات هي (٤س^{٢} + ١٤٠س + ٥٠٠) ريالًا عمانيًا ، فأوجد عدد الطابعات التي يبيعها المصنع شهريًا ليكون الربح أكبر ما يمكن.
١٩	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة ص = د(س) حيث $\frac{ د ص}{ د س}$ = (٤ — س^{٢})(س^{٢} + ١)
٢٠	٢٠١٤-٢٠١٥ دور اول مستطيل طوله س = ١٩ سم ، وعرضه ص = ٧ سم . إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدّل ١ سم / ثانية ، وعرضه يتزايد بمعدّل ٢ سم / ثانية ، فاحسب معدّل التغيّر في مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربعًا.

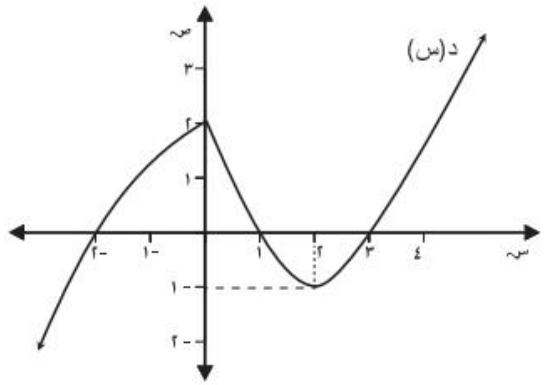
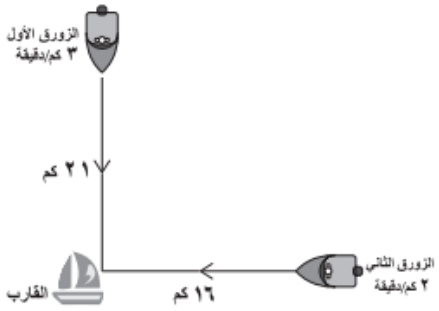
اختبار الوحدة

أولا: الأسئلة الموضوعية:

م	السؤال
١	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول إذا كانت د(س) = ٤س^{٢} — ١ وتغيّرت س من ١ إلى ٢ ، فإن متوسط معدّل تغيّر د(س) يساوي: ☐ ١٦ ☐ ١٢ ☐ ٨ ☐ ٤
٢	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول إذا كانت د(س) = س^{٣} — ٢س^{٢} ، فإن د$''$(٢) تساوي: ☐ ٢- ☐ صفر ☐ ٤ ☐ ٨
٣	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول يتحرك جسيم وفق دالة المسافة ف (ن) = ن^{٢} + ٥ ن ، حيث ف هي المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية، فإن سرعة الجسيم عند اللحظة ن = ٣ ثوانٍ تساوي: ☐ ٢٤ ☐ ١١ ☐ ١٠ ☐ ٢
٤	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول) الشكل المجاور يمثّل منحنى ص = ٤س — س^{٢}، وكانت النقطة جـ تقع على المنحنى في الفترة [أ، ب] ، فإن أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب جـ عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة جـ يساوي:  ☐ $\frac{٢}{٣}$ ☐ $\frac{٣}{٢}$ ☐ ٢ ☐ ٣
٥	٢٠١٥ -٢٠١٦ دور اول إذا كانت ع(س) ، ق(س) دوالًا قابلةً للاشتقاق على مجالها ، حيث ع(س) = (٣س + ٢) × ق$'$(س) ، ق$'$(١) = ٥ ، ق$''$(١) = ٦ ، فإن ع$'$(١) تساوي: ☐ ٥١ ☐ ٤٥ ☐ ٤٣ ☐ ١٨

٦	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول **إذا كان ق(س^{٣}) = (٢ + ل)س^{٢} ، حيث ل ∈ ح ، ق$'$(١) = −٤ ، فإن قيمة ل تساوي:** ٨ ☐ ٤ ☐ −٤ ☐ −٨ ☐
٧	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي)اذا كانت هـ(س) كثيرة حدود من الدرجة ن وكان متوسط معدل تغيرها دائما يساوي ٣ فإن قيمة ن تساوي: أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د)صفر
٨	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي اذا كان المستقيم ص= س + ٤ مماساً للمنحنى هـ(س) عند س=١ وكان ق(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$ فإن ق(١)$'$= أ) ٢ ب) -٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{-٢}$
٩	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي خزان على شكل مكعب طول ضلعه ٢ م يصب فيه ماء بمعدل 0.4 م^{٣}/ث ، معدل ارتفاع الماء في الخزان بـ (م/ث) يساوي: أ) 1.6 ب) ٤ جـ) $\frac{١}{١٠}$ د) ٨
١٠	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي اذا كانت للدالة د(س) = ٤ س^{٢} + $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ نقطة حرجة عند س= $\frac{١}{٢}$ فإن قيمة أ تساوي: أ) ٨ ب) ٤ جـ) ٢ د) ١
١١	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي) اذا كانت د(س) = ٢ س^{٢} +١ ، ع(س) = س+١ وكانت ل(س)= د(س) × ع(س) فإن ل$'$(١) = أ)١٣ ب) ١١ جـ) ٧ د) ٥
١٢	٢٠١٥ -٢٠١٦ تدريبي) اذا كانت ع(س) = $\frac{١}{\text{أ}}$ $\sqrt{\text{أ س+٤}}$ ، هـ (١) =٣ ، هـ(١) $'$ = ٢ وكانت (ع ∘ هـ)$'$(١) = $\frac{١}{٤}$ فإن قيمة أ تساوي :) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٧

ثانيا: الأسئلة المقالية:

م	السؤال
١	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول استخدم التعريف $\frac{ص}{س} = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ لإيجاد $\frac{ص}{س}$ للدالة د(س) = س + ٢ ، عند س = ٤
٢	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول إذا كانت $س = \frac{ص + ١}{ص - ١}$ ، فأوجد $ص''$ عند ص = ٢
٣	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول أوجد النقاط الواقعة على المنحنى $ص^{٢} + ٣س^{٢} = ٢٧$ ، والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات.
٤	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س) على ح ، أوجد : أ) فترات التزايد للدالة د(س) .  ب) النقاط الحرجة.
٥	٢٠١٥-٢٠١٦ دور اول تحرك زورقا إنقاذ نحو قارب، حيث يبعد القارب عن الزورق الأول ٢١ كم جنوبًا، وعن الزورق الثاني ١٦ كم غربًا، إذا كان معدّل اقتراب كلًا من الزورقين من القارب ٣ كم/دقيقة ، ٢ كم/دقيقة على الترتيب. أوجد معدّل تغيّر المسافة بين الزورقين بعد مُضي ٦ دقائق من لحظة انطلاقهما. 

٦	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي اذا كانت د(س) = ٢س^{٣} +٦س^{٢} – ٩س فأوجد د(٢)$'$.
٧	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي **١٨) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة** د(س) = $\begin{cases} \|١٠-٣س\| & ، \quad س \leq ١ \\ ٢س^{٢}+٣س+٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$ **اذا علمت أن د(س) متصلة على مجالها.**
٨	٢٠١٥ -٢٠١٦ تدريبي **٢٠) اوجد معادلة المماس للمنحنى** (٢س+ص)^{٢} +س + ص=٤٠ **عند نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم ٢س +ص=٦**
٩	٢٠١٥-٢٠١٦ تدريبي **اذا كانت** س^{٢} = ص^{٢} (١–س) **فأثبت أن** ص$'$ = $\frac{ص}{س}$ + $\frac{ص^{٣}}{٢س^{٢}}$
١٠	٢٠١٥ -٢٠١٦ تدريبي **يتحرك جسيم وفق العلاقة** ٢ع = ا^{٢} ف ، ا **عدد ثابت . أثبت أن التسارع ثابت**

دليل الإجابات على الأسئلة الموضوعية والمقالية

الدرس الأول:

أولا: الأسئلة الموضوعية:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
رقم البديل الصحيح	$\frac{-٣}{٤}$	٤	١٤	-٢	٣	٥	م	٢	صفر

ثانيا: الأسئلة المقالية:

رقم السؤال	الإجابة
١	$د'(١) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{٥ - (١ + هـ)^٢ - ٦}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{-١ - ٢هـ - هـ^٢}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to 0^+} (-٢ - هـ)$ $= -٢$ ملاحظة : إذا لم يكتب الطالب الخطوة الأولى وبدأ من الخطوة الثانية مباشرة تضاف درجة الخطو ة الأولى إلى الخطوة الثانية .

٢	$د'(-١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(-١ + هـ) - د(-١)}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(-١ + هـ)^{٢} + ١ - ٢}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - ٢هـ + هـ^{٢} + ١ - ٢}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} -٢ + هـ$ $= -٢$ ملاحظة : إذا لم يكتب الطالب الخطوة الأولى وبدأ بالخطوة الثانية مباشرة تضاف درجتها إلى الخطوة الثانية .
٣	$د'(٢^{+}) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢(٢ + هـ)^{٢} + ٣ - ١١}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨هـ + ٢هـ^{٢}}{هـ}$ $= ٨$ $د'(٢^{-}) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨(٢ + هـ) - ٥ - ١١}{هـ}$ $= ٨$ $\because د'(٢^{+}) = د'(٢^{-}) = ٨$ $د'(٢) = ٨$ ← د (س) قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ملاحظة : إذا أوجد الطالب المشتقة بدون استخدام التعريف يعطى درجتان فقط.

٤	$\Delta س = ٢ - ^{-}٣ = ٥$ $\Delta ص = ص_{،} - ص_{،} = د(س_{،}) - د(س_{،})$ $= د(٢) - د(-٣)$ $= (٢)^{٢} + ٣ - ((-٣)^{٢} + ٣)$ $= ٧ - ١٢ = -٥$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-٥}{٥} = -١$
٥	أ) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠}$ $= \frac{(٢ \times ٩ + ٤) - (٠ + ٥)}{٣}$ $= \frac{-٢٢ - ٥}{٣} = \frac{١٧}{٣}$ ب) ∵ الدالة ق(س) متصلة وقابلة للاشتقاق عند س = ـ ٢ ∴ معدل التغير (عند س = ـ٢) = ق′ (ـ ٢) $= ٤ \times (-٢)^{٣} = -٣٢$

الدرس الثاني

أولا: الأسئلة الموضوعية:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
البديل الصحيح	١٠	-٦	$٢٤س^{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٨	-٤	٥	-٦	٦	٣	٤	١

رقم السؤال	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤
البديل الصحيح	$\frac{٣}{٤}$	صفر	٢س-١	-١	$\frac{٢}{٣}$	$٢س_{١}$	٢(س-١)	-٤	-٧	٢٨	٦	-١

رقم السؤال	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤
البديل الصحيح	-٩	$\frac{-٨}{٧}$	١٨	١١	١	$٢م^{٤}$	-٨	$\frac{٥}{٦}$	٦(٣س+١)	-١

ثانيا: الأسئلة المقالية:

رقم السؤال	الإجابة
١	$ص^{٢} = ٥س - ص$ $٢ص ص' = ٥ - ص'$ $ص' = \frac{٥}{(٢ص + ١)}$ ⟸ (١) $ص'' = \frac{-١٠ ص'}{(٢ص + ١)^{٢}}$ من (١) ⟸ $ص'' = \frac{-١٠ \times \frac{٥}{(٢ص + ١)}}{(٢ص + ١)^{٢}}$ $= \frac{-٥٠}{(٢ص + ١)^{٣}}$ $= \frac{٥٠}{(-٢ص - ١)^{٣}}$ وهو المطلوب اثباته ل آخر $ص^{٢} = ٥س + ص$ $٢ص ص' = ٥ + ص'$ ⟵ (١) $٢ص ص'' + ٢ص'^{٢} = ص''$ $ص'' = \frac{-٢٠ ص'^{٢}}{(٢ص + ١)}$ من (١) ⟸ $ص' = \frac{٥}{(٢ص + ١)}$ $ص'' = \frac{-٢٠ \times ٢٥}{(٢ص + ١)^{٣}}$ $= \frac{٥٠}{(-٢ص - ١)^{٣}}$ وهو المطلوب اثباته

٢

∵ مماس المنحنى موازي لمحور السينات ∴ ص َ = ٠

$$٢س(س-١)+(س-١)^{٢}=٠$$

$$٣س^{٢}-٤س+١=٠ \leftarrow (٣س-١)(س-١)=٠$$

$$س=\frac{١}{٣} \quad \text{أو} \quad س=١$$

بالتعويض في منحنى الدالة عن قيم س ينتج : $ص=\frac{٤}{٢٧}$ أو ص = ٠

∴ النقاط هى $\left(\frac{١}{٣}، \frac{٤}{٢٧}\right)$ ، (٠، ١)

٣

$$د(س)=\frac{(س^{٢}+٢س)^{\frac{٣}{٢}}}{٢س+٢}$$

$$د'(س)=\frac{٢\times(س^{٢}+٢س)^{\frac{٣}{٢}}-(٢س+٢)\times\frac{٣}{٢}(س^{٢}+٢س)^{\frac{١}{٢}}\times(٢س+٢)}{(٢س+٢)^{٢}}$$

$$=\frac{٢\times(س^{٢}+٢س)^{\frac{٣}{٢}}-(٢س+٢)^{٢}\times\frac{٣}{٢}(س^{٢}+٢س)^{\frac{١}{٢}}}{(٢س+٢)^{٢}}$$

$$=\frac{٢\times(س^{٢}+٢س)^{\frac{٣}{٢}}}{(٢س+٢)^{٢}}-\frac{(٢س+٢)^{٢}\times\frac{٣}{٢}(س^{٢}+٢س)^{\frac{١}{٢}}}{(٢س+٢)^{٢}}$$

$$=\frac{٢\times(س^{٢}+٢س)^{\frac{٣}{٢}}}{(٢س+٢)^{٢}}-\frac{٣}{٢}(س^{٢}+٢س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore د'(س)=\frac{٣}{٢}هـ(س)-\frac{٢(هـ(س))^{٣}}{(ل(س))^{٢}}$$

٤	$د'(س) = ٣س^{٢} - ٢س$ ، $هـ'(س) = ٢$ $\because (د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \cdot هـ'(س)$ $\therefore (د \circ هـ)'(س) = ٢ \times ((٣(٢س-١)^{٢} - ٢(٢س-١))$ $= (١٢س^{٢} - ١٢س + ٣ - ٤س + ٢) \times ٢ = ٢٤س^{٢} - ٣٢س + ١٠$ $(د \circ هـ)'(١) = ٢٤ - ٣٢ + ١٠ = ٢$
٥	$\frac{ص}{س} = \frac{٣س}{\sqrt{٣س^{٢} + ٤}}$ ، $\frac{ل}{س} = ٤(٢ + ٢س)$ $٨ + \frac{٣س}{\sqrt{٣س^{٢} + ٤}} \times \sqrt{٣س^{٢} + ٤} + ٥س - ٤(٢ + ٢س)$ $= ٨ + ٣س + ٥س - ٨ - ٨س = ٠$
٦	$\because ص^{٢} - س ص = ١$ $٢ص ص' - س ص' - ص = ٠ \leftarrow (١)$ $٢ص ص' + ٢(ص')^{٢} - س ص' - ص - ص' = ٠$ $ص'(٢ص - س) + ٢[(ص')^{٢} - ص'] = ٠ \leftarrow (٢)$ من (١) : $ص' = \frac{ص}{٢ص - س}$ بالتعويض في (٢) $ص'(٢ص - س) + ٢\left[\frac{ص^{٢}}{(٢ص-س)^{٢}} - \frac{ص}{٢ص-س}\right] = ٠$ بالضرب في $(٢ص - س)^{٢}$ نحصل على: $ص'(٢ص - س)^{٣} + ٢[ص^{٢} - ص(٢ص - س)] = ٠$ $ص'(٢ص - س)^{٣} + ٢[ص^{٢} - ٢ص^{٢} + س ص] = ٠$ $ص'(٢ص - س)^{٣} + ٢\underbrace{[-ص^{٢} + س ص]}_{=١} = ٠$ $\therefore ص'(٢ص - س)^{٣} - ٢ = ٠$

٧	$(س ص + ١)^{٢}(س ص) = ١$ $٢(س ص + ١)(س ص^{-} + ص) س ص$ $+ (س ص^{-} + ص)(س ص + ١)^{٢} = ٠$ $(س ص^{-} + ص)\left[٢(س ص+١) س ص+(س ص+١)^{٢}\right] = ٠$ التعويض عن $س ص = \frac{١}{(س ص + ١)^{٢}}$ $(س ص^{-} + ص)\left[\frac{١}{س ص} + \frac{٢}{(س ص + ١)}\right] = ٠$ $(س ص^{-} + ص)\left[\frac{١ + ٣ س ص}{س ص (س ص + ١)}\right] = ٠$ $\therefore (س ص^{-} + ص)(٣ س ص + ١) = ٠$ $\because ٣ س ص + ١ \neq ٠$ لأن $س ص > ٠$ من معطى السؤال $\therefore س ص^{-} + ص = ٠$
٨	$٢ص \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} - ٢ = ٠$ التعـــويض بالنقطـــة (٢،١) $٢ \times ٢ \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} - ٢ = ٠$ $٥ \frac{ص}{س} = ٢ \Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{٢}{٥}$ ميل المماس $= \frac{ص}{س} = \frac{٢}{٥}$ ميل العمودي $= -\frac{٥}{٢}$ معادلة العمودي هي: $(ص - ٢) = -\frac{٥}{٢}(س - ١)$ $٢ص + ٥س - ٩ = ٠$

٩	$(٣س + ٤)ص = ٢س + ٥$ $(٣س + ٤)\ ص' + ٣ص = ٢$ $(٣س + ٤)\ ص'' + ٣\ ص' + ٣\ ص' = ٠$ $(٣س + ٤)\ ص'' + ٦\ ص' = ٠$ $(٣س + ٤) = \frac{-٦\ ص'}{ص''}$ ← ① $(٣س + ٤)\ ص''' + ٣\ ص'' + ٦\ ص'' = ٠$ $(٣س + ٤)\ ص''' + ٩\ ص'' = ٠$ ← ② التعويض بـ ① في ② $\frac{-٦\ ص'}{ص''}\ ص''' + ٩\ ص'' = ٠$ $-٦\ ص'\ ص''' + ٩(ص'')^{٢} = ٠$ $٢\ ص'\ ص''' = ٣(ص'')^{٢}$ **حل أخر :** $ص' = \frac{٣ \times (٥ + ٢س) - ٢ \times (٣س + ٤)}{(٣س + ٤)^{٢}} = \frac{-٧}{(٣س + ٤)^{٢}}$ $ص'' = \frac{٣ \times (٣س + ٤) ٢ \times ٧}{(٣س + ٤)} = \frac{٤٢}{(٣س + ٤)^{٣}}$ $ص''' = \frac{-٤٢ \times ٣ (٣س + ٤)^{٢} \times ٣}{(٣س + ٤)} = \frac{-٣٧٨}{(٣س + ٤)^{٤}}$ $٢ص'\ ص''' = ٢ \left(\frac{-٧}{(٣س + ٤)^{٢}}\right)\left(\frac{-٣٧٨}{(٣س + ٤)^{٤}}\right) = \frac{٥٢٩٢}{(٣س + ٤)^{٦}}$	
١٠	ميل المماس عند النقطة (١، ٤) = ق' (١) ق' (س) = ٣س^{٢} + ٢س + ١ ق' (١) = ٣ + ٢ + ١ = ٦	

١١	ص^{٢} ـ ٢س ص = -٣ بالاشتقاق الضمني : ٢ص ص' ـ ٢س ص' ـ ٢ص = ٠ ص' (ص ـ س) ـ ص = ٠ ← (١) بالاشتقاق الضمني : ص'(ص' ـ ١)+ ص" (ص ـ س) ـ ص'=٠ ص" (ص ـ س)+ ص' (ص' ـ ٢)= ٠ ←(٢) عند ص = ٣ ، بالتعويض في الدالة : ٩ ـ ٦س = -٣ ⇐ س = ٢ بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٣ في معادلة (١) ص' (٣ ـ ٢) ـ ٣ = ٠ ص' = ٣ بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٣ ، ص'= ٣ في (٢) ص"+ ٣ (٣ ـ ٢) = ٠ ∴ ص" = -٣
١٢	٢ ص $\frac{ك ص}{ك س}$ = ص + س $\frac{ك ص}{ك س}$ ص = (٢ ص – س) $\frac{ك ص}{ك س}$ ∴ $\frac{ك ص}{ك س}$ = $\frac{ص}{٢ص - س}$

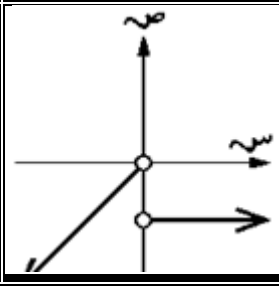
١٣	$\because$ ق' (٣) = ٨ $\therefore$ $\lim_{هـ \to 0}$ $\frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{هـ}$ = ٨ $\lim_{م \to 0}$ $\frac{ق(٣+٢م)-ق(٣-م)+ق(٣)-ق(٣)}{م}$ = $\lim_{م \to 0}$ $\frac{ق(٣+٢م)-ق(٣)}{م}$ - $\lim_{م \to 0}$ $\frac{(ق(٣-م)-ق(٣))}{م}$ بوضع ٢م = ل في النهاية الأولى. - م = ك في النهاية الثانية. = $\lim_{ل \to 0}$ $\frac{ق(٣+ل)-ق(٣)}{٢/ل}$ - $\lim_{ك \to 0}$ $\frac{(ق(٣+ك)-ق(٣))}{-ك}$ = ٢ × ق' (٣) + ق' (٣) = ٣ × ق' (٣) = ٢٤
١٤	ع (ن) = $\frac{ى ف}{ى ن}$ $\therefore$ ع (ن) = ٦ ن^{٢} − ٩ ت (ن) = $\frac{ى ع}{ى ن}$ $\therefore$ ت (ن) = ١٢ ن تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة : ت (٣) = ١٢ × ٣ = ٣٦ م/ث^{٢}

١٥		هـ (س) = د (س) × ل (س) بالاشتقاق : هـ ′(س) = د(س) ل′(س) + ل(س) د′(س) ⇐ (١) هـ" (س)= د(س) ل"(س) + ل′(س) د′(س) + ل(س)د"(س) + ل′(س) د′(س) ∴ هـ" (س)= د(س) ل"(س) +٢ ل′(س) د′(س) + ل(س) د"(س) ⇐ (٢) بالتعويض عن س = ٢ في (٢) هـ "(٢) = د (٢) ل" (٢) $\therefore د(٢) = \frac{هـ''(٢)}{ل''(٢)}$

الدرس الثالث :

أولا: الأسئلة الموضوعية:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
البديل الصحيح	٢	٢	٢ π	٣	ليس لها نقاط حرجة	] ∞ ، ٠ [	١

رقم السؤال	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
البديل الصحيح	{ -٢، ٠، ٢ }	صفر	عظمى محلية	-١٢		صفر	-٦

ثانيا: الأسئلة المقالية:

رقم السؤال	الإجابة
١	$ح = \frac{١}{٣}\pi ف^{٢} ع$ $\because ٢ ف = ٣ ع \Leftarrow ف = \frac{٣}{٢} ع$ $\therefore ح = \frac{\pi ٣}{٤} ع^{٣}$ $\frac{ح_{١}}{ح_{٢}} = \frac{\pi ٩}{٤} ع^{٢} \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ $\frac{\pi ٤}{٣} = \frac{\pi ٩}{٤} (٢)^{٢} \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{٤}{٢٧}$ م/د

نفرض أن مساحة المنطقة الواحدة = م(س)

∴ م(س) = س × ص

$$\begin{cases} = س\left(150 - \frac{3}{2} س\right) \\ = 150س - \frac{3}{2} س^2 \end{cases}$$

$م'(س) = 150 - 3س$

نضع $م'(س)$ = صفر ⟸ س = 50

$م''(س) = -3$

$$\begin{cases} \text{عندما س} = 50 \Longleftarrow م''(50) < \text{الصفر} \\ \therefore \text{تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما س} = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \therefore \text{مساحة المنطقة الواحدة} = 50\left(150 - \frac{3}{2} \times 50\right) \\ = 3750 \text{ م}^2 \end{cases}$$

٢

حل آخر :

$600 = 6س + 4ص$

$س = 100 - \frac{2}{3} ص$

$$\begin{cases} \therefore م(ص) = ص\left(100 - \frac{2}{3} ص\right) \\ = 100ص - \frac{2}{3} ص^2 \end{cases}$$

$م'(ص) = 100 - \frac{4}{3} ص$

نضع $م'(ص)$ = صفر ⟸ ص = 75

$م''(ص) = -\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} \text{عندما ص} = 75 \Longleftarrow م''(75) < \text{صفر} \\ \text{تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما ص} = 75 \end{cases}$$

مساحة المنطقة الواحدة $= 75\left(100 - \frac{2}{3} \times 75\right) = 3750$ م^2

٣

١) د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} – ٦ س

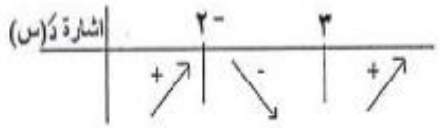
دَ (س) = س^{٢} – س – ٦

نضع دَ (س) = ٠ لايجاد النقاط الحرجة

س^{٢} – س – ٦ = ٠ ⟸ (س – ٣) (س + ٢) = ٠

ومنها س = ٣ ، س = -٢

نبحث اشارة المشتقة الاولى



من الرسم

د(س) متزايدة على ح -]-٢ ، ٣[

ومتناقصة على]-٢ ، ٣[

٢) د(-٢) = $\frac{٢٢}{٣}$ قيمة عظمى محلية

د (٣) = $\frac{-٢٧}{٢}$ قيمة صغرى محلية

حل آخر للجزئية (٢)

دً (س) = ٢س – ١

∵ دَ (-٢) = - ٥ < ٠

∴ عند س = -٢ توجد قيمة عظمى محلية

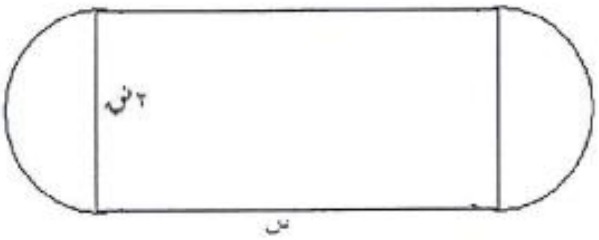
د(-٢) = $\frac{٢٢}{٣}$ قيمة عظمى محلية

∵ دً (٣) = ٥ > ٠

∴ عند س = -٢ توجد قيمة صغرى محلية

د (٣) = $\frac{-٢٧}{٢}$ قيمة صغرى محلية

ملاحظة (اذا استخدم الطالب اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى يأخذ الطالب نصف درجة على المشتقة الثانية و على اختبار المشتقة الاولى (الرسم) درجة)

٤	$\because$ ح $= \pi$ نق^{٢} ع $\because$ نق $= \frac{١}{٣}$ ع ح $= \frac{\pi}{٩}$ ع^{٣} $\because \frac{\text{ء ح}}{\text{ء ن}} = \frac{\pi}{٣}$ ع^{٢} $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$ $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} = \frac{\pi}{٣} \times (٢)^{٢} \times ٠,٨$ $\therefore \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} = \frac{٦}{\pi ١٠} = \frac{٠,٦}{\pi} \cong ٠,٢$ سم/ث
٥	 المحيط $= ٢$ س $+ ٢\pi$ نق $٤٠٠ = ٢$ س $+ ٢\pi$ نق س $= ٢٠٠ - \pi$ نق م $= ٢$ نق س $+ \pi$ نق^{٢} م $= ٢$ نق $(٢٠٠ - \pi$ نق$) + \pi$ نق^{٢} م $= ٤٠٠$ نق $- ٢\pi$ نق$^{٢} + \pi$ نق^{٢} م $= ٤٠٠$ نق $- \pi$ نق^{٢} $\frac{\text{ء م}}{\text{ء نق}} = ٤٠٠ - ٢\pi$ نق $\Leftarrow$ $٤٠٠ - ٢\pi$ نق $= ٠$ $\Leftarrow$ نق $= \frac{٢٠٠}{\pi}$ م $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ء نق}^{٢}} = -٢\pi < ٠$ $\therefore$ المساحة تكون أكبر ما يمكن عند نق $= \frac{٢٠٠}{\pi}$ م

٦

نوجد $\text{د}(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، \quad س < ٠ \\ -٢(س - ١) & ، \quad ٠ < س < ٢ \\ ١ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$

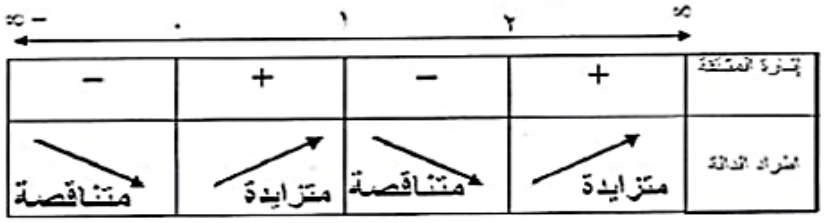
$\text{د}(س) = ٠$ عندما $٢س - ٢ = ٠ \longleftarrow$ $س = ١$

أو $-٢(س - ١) = ٠ \longleftarrow$ $س = ١$

$\because ١ \ni]٢ ، ٠[\quad \therefore$ عند $س = ١$ توجد نقطة حرجة

$\because \text{د}(٠^+) \neq \text{د}(٠^-) \quad \therefore$ عند $س = ٠$ توجد نقطة حرجة

$\because \text{د}(٢^+) \neq \text{د}(٢^-) \quad \therefore$ عند $س = ٢$ توجد نقطة حرجة

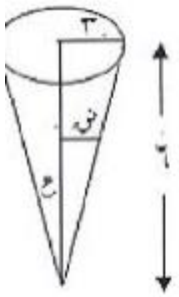


د(٠) = -١ (٠ ، -١) قيمة صغرى محلية

د(٢) = -١ (٢ ، -١) قيمة صغرى محلية

د(١) = ٠ (١ ، ٠) قيمة عظمى محلية

٧

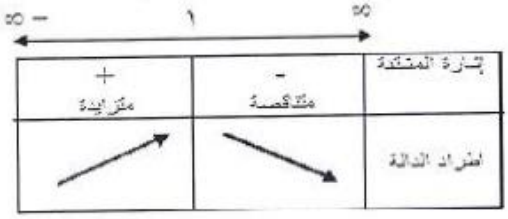
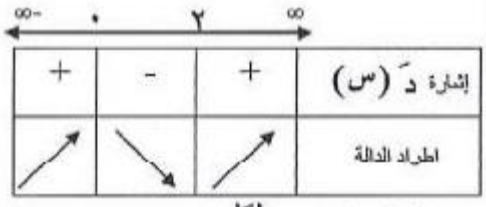


$\text{ف}_{\text{نق}} = \frac{\text{ع}}{٢}$ ، $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = -٣$ سم^٣/ث

$ح = \frac{١}{٣}\pi \text{ع}^٢ \text{ف}_{\text{نق}} \Longleftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi \left(\frac{\text{ع}}{٢}\right)^٢ \text{ع}$

$ح = \frac{\pi}{١٢}\text{ع}^٣ \Longleftarrow \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \text{ع}^٢ \frac{\pi}{٤}$

$-٣ = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} \times ١٦ \times \frac{\pi}{٤} \Longleftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{-٣}{\pi ٤}$ سم/ث

٨	$د'(س) = \begin{cases} ١ & ، \ س > ١ \\ -٢س & ، \ س < ١ \end{cases}$ ∵ $د'(س) = ٠$ عندما $-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$ ولكن $٠ \notin]-\infty، ١[$ ∵ $د'(١^+) \neq د'(١^-)$ ∴ $د'(١)$ غير موجودة ∴ عند س= ١ توجد نقطة حرجة $د''(١) = -٢ < ٠$ ∴ عند س=١ توجد قيمة عظمى محلية هي د(١) = ٣ **حل آخر:** ∵ $د'(١^+) \neq د'(١^-)$ ∴ $د'(١)$ غير موجودة ∴ عند س= ١ توجد نقطة حرجة  من الجدول عند س= ١ توجد قيمة عظمى محلية هي د(١) = ٣
٩	$د(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - س^٢$ $د'(س) = س^٢ - ٢س$ $د'(س) = ٠$ ∴ $س(س - ٢) = ٠$ ∴ س = ٠ ، س = ٢ توجد نقطتان حرجتان عند س =٠، س= ٢  ∵ $د'(س) < ٠$ لكل $س \in]-\infty، ٠[\cup]٢، \infty[$ ∴ د(س) متزايدة فى الفترة $]-\infty، ٠] \cup [٢، \infty[$ ∵ $د'(س) > ٠$ لكل $س \in]٠، ٢[$ ∴ د(س) متناقصة في الفترة $[٠، ٢]$

١٠

$\because م = ٢\pi نو^{٢} + ٤\pi نو^{٢} + \pi نو^{٢}$

$\therefore$ التكلفة = تكلفة الزجاج + تكلفة المعدن

$ك = ٢ \times ٢\pi نو^{٢} + ٤ \times ٢\pi نو^{٢} + ١ \times \pi نو^{٢}$

الحجم $= ٩٦\pi = \pi نو^{٢} ع \Leftarrow ع = \frac{٩٦}{نو^{٢}}$

$ك = ٤\pi نو \times \frac{٩٦}{نو^{٢}} + ٣\pi نو^{٢}$

$ك = \frac{٣٨٤\pi}{نو} + ٣\pi نو^{٢}$

$ك'(نو) = -\frac{٣٨٤\pi}{نو^{٢}} + ٦\pi نو = ٠$

$\therefore نو^{٣} = \frac{٣٨٤}{٦} \Leftarrow نو = ٤ م$

$ك''(نو) = \frac{٢ نو \times ٣٨٤\pi}{نو^{٤}} + ٦\pi$

$= \frac{٧٦٨\pi}{نو^{٣}} + ٦\pi$

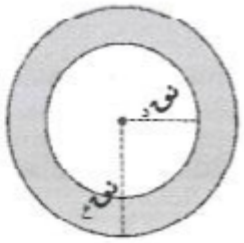
$ك''(٤) = ١٨\pi > ٠$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند نو $= ٤$

لكي تكون التكلفة أقل ما يمكن لا بد أن يكون نو $= ٤$

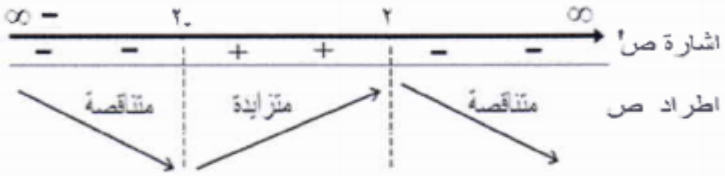
$\therefore ع = \frac{٩٦}{(٤)^{٢}} = ٦ م$

١١	$\frac{ع س}{ع ن} = ٢$ م/ث $\frac{ع ص}{ع ن} = ١$ م/ث ∴ إرتفاع المنطاد أ بعد ٣ ث (ص) = ٢×٣=٦م إرتفاع المنطاد ب بعد ٣ ث (س) = ١×٣= ٣م ∴ ف^{٢} = (ص - س)^{٢} + ١٦ $٢ف \frac{ع ف}{ع ن} = ٢(ص-س)\left[\frac{ع ص}{ع ن} - \frac{ع س}{ع ن}\right]$ $\frac{ع ف}{ع ن} = \frac{(ص - س)\left[\frac{ع ص}{ع ن} - \frac{ع س}{ع ن}\right]}{ف}$ $= \frac{(ص - س)\left[\frac{ع ص}{ع ن} - \frac{ع س}{ع ن}\right]}{\sqrt{(ص - س)^{٢} + ١٦}}$ $= \frac{٣\times[١-٢]}{\sqrt{٩+١٦}}$ $= \frac{٣}{٥}$ م/ث^{٢}
١٢	د$'$ (س) = ٦س^{٢} + ٦س − ١٢ د$'$ (س) = ٠ ٦س^{٢} + ٦س − ١٢ = ٠ س^{٢} + س − ٢ = ٠ ⇐ (س + ٢)(س − ١) = ٠ ∴ س = −٢ ، س = ١ ∴ توجد نقطتان حرجتان عند س = ١، س = −٢ ∴ د$''$ (س) = ١٢س + ٦ عند س = ١ ⇐ د$''$ (١) = ١٨ > ٠ ∴ عند س = ١ توجد قيمة صغرى محلية هي د (١) = −٧ عند س = −٢ ⇐ د$''$ (−٢) = −١٨ < ٠ ∴ عند س = −٢ توجد قيمة عظمى محلية هي د (−٢) = ٢٠

١٣	نق$_{ص}$: نصف قطر الدائرة الصغرى ، نق$_{ك}$: نصف قطر الدائرة الكبرى نق$_{ص}$ = ٦ ، نق$_{ك}$ = ٢٤ $\frac{ع نق_{ص}}{ن ع} = ٢$ ، $\frac{ع نق_{ك}}{ن ع} = -٤$ م = مساحة الدائرة الخارجية – مساحة الدائرة الداخلية م = π نق$^{٢}_{ك}$ – π نق$^{٢}_{ص}$  $\frac{م ع}{ن ع} = \underbrace{\pi ٢ \times نق_{ك}}_{\frac{١}{٢}} \times \underbrace{\frac{ع نق_{ك}}{ن ع}}_{\frac{١}{٢}} - \underbrace{\pi ٢ \times نق_{ص}}_{\frac{١}{٢}} \times \underbrace{\frac{ع نق_{ص}}{ن ع}}_{\frac{١}{٢}}$ ∵ نق$_{ك}$ = نق$_{ص}$ = ١٢ ∴ $\frac{م ع}{ن ع} = \pi ٢ \times ١٢ \times ١٢ - (-٤) \times \pi ٢ \times ١٢ \times ٢$ = π٩٦- – π٤٨- = π١٤٤- سم^{٢}/ث

١٤	محيط النافذة $= ٣س + ٢ص = ١٢ - ٢\sqrt{٣}$ $ص = \frac{١٢ - ٢\sqrt{٣} - ٣س}{٢} = ٦ - \sqrt{٣} - \frac{٣}{٢}س$ مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث المتطابق الأضلاع $م = س ص + \frac{١}{٢} س \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} س$ $م = س \left(٦ - \sqrt{٣} - \frac{٣}{٢}س\right) + \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^{٢}$ $م = \left(٦ - \sqrt{٣}\right) س - \frac{٦ - \sqrt{٣}}{٤} س^{٢}$ $م' = \left(٦ - \sqrt{٣}\right) - \frac{٦ - \sqrt{٣}}{٢} س$ بوضع $م' = ٠$ $\left(٦ - \sqrt{٣}\right) - \frac{٦ - \sqrt{٣}}{٢} س = ٠$ $س = \frac{-\left(٦ - \sqrt{٣}\right)}{-\frac{٦ - \sqrt{٣}}{٢}} = ٢$ • التحقق باستخدام المشتقة الثانية $م'' = -\frac{٦ - \sqrt{٣}}{٢} < ٠$ ∴ توجد قيمة عظمى عند $س = ٢$ $ص = ٦ - \sqrt{٣} - \frac{٣}{٢}(٢)$ $ص = ٣ - \sqrt{٣} \approx ١,٢٦٨$
١٥	$د'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$ $د'(س) =$ صفر $٣س^{٢} - ١٢ = ٠$ $س^{٢} - ٤ = ٠$ $س = \pm ٢$ $د(-٢) = -٨ + ٢٤ = ١٦ \Leftarrow (-٢، ١٦)$ $د(٢) = ٨ - ٢٤ = -١٦ \Leftarrow (٢، -١٦)$

١٦	$\frac{\text{د}نو_{١}}{\text{د}ن} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{د}نو_{٢}}{\text{د}ن} = ؟$ $نو_{١} = ٨$ ، $نو_{٢} = ١٠$ الحجم: ح ثابت ، الارتفاع : ع ثابت $نو_{١}$: نصف القطر الداخلي ، $نو_{٢}$: نصف القطر الخارجي حجم الحديد : ح = الحجم الخارجي – الحجم الداخلي $ع = \pi نو_{٢}^{٢} ع - \pi نو_{١}^{٢} ع$ $ع = \pi ع (نو_{٢}^{٢} - نو_{١}^{٢})$ $\frac{\text{د}ع}{\text{د}ن} = \pi ع \left(٢ نو_{٢} \frac{\text{د}نو_{٢}}{\text{د}ن} - ٢ نو_{١} \frac{\text{د}نو_{١}}{\text{د}ن} \right)$ $٠ = ١٠ \times ٨ \times \frac{١}{٤} - \frac{\text{د}نو_{٢}}{\text{د}ن} \times ١٠ \times ٨$ $\frac{\text{د}نو_{٢}}{\text{د}ن} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥} = ٠,٢$ سم / د
١٧	$د'(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٩$ $د'(س) = ٠$ $٣س^{٢} + ٦س - ٩ = ٠$ $س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠$ $(س - ١)(س + ٣) = ٠$ $س = ١ ، س = -٣$ إشارة $د'(س)$: +	−	+ اطراد $د(س)$: متزايدة	متناقصة	متزايدة $د(س)$ متزايدة في $]-\infty ، -٣[\cup]١ ، \infty[$ $د(س)$ متناقصة في $]-٣ ، ١[$

١٨	الربح(المكسب) = اجمالي المبيعات ـ التكلفة الكلية م(س)= س×(٨٤٠ ـ ١٠س) ـ (٤س^{٢}+١٤٠س+٥٠٠) م (س) = - ١٤ س^{٢} + ٧٠٠ س ـ ٥٠٠ م' (س) = - ٢٨ س + ٧٠٠ بوضع م' (س) = صفر ٢٨س = ٧٠٠ و منها س = ٢٥ طابعة التحقق باستخدام المشتقة الثانية : م" (٢٥) = - ٢٨ < صفر ∴ توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٢٥ ∴ عدد الطابعات اللازم بيعها شهرياً ليكون الربح أكبر ما يمكن هو ٢٥ طابعة
١٩	$\frac{ص}{س}$ = (٤ ـ س^{٢}) (س^{٢} + ١) بوضع $\frac{ص}{س}$ = صفر ٤ ـ س^{٢} = صفر ∴ القيم الحرجة للدالة د(س) تكون عند س = ± ٢ س^{٢} + ١ < صفر باستخدام اختبار المشتقة الأولى :  ∴ د(س) متزايدة في الفترة [-٢ ، ٢] د(س) متناقصة في الفترة] - ∞ ، - ٢ [∪] ٢ ، ∞ [أو متناقصة في الفترة ح ـ] ـ ٢ ، ٢ [

٢٠	$\frac{ع س}{ع ن}$ = - ١ سم/ث ، $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٢ سم/ث طول وعرض المستطيل بعد ن من الزمن : س$_ن$ = س + ن × $\frac{ع س}{ع ن}$ ، ص$_ن$ = ص + ن × $\frac{ع ص}{ع ن}$ عندما يصبح المستطيل مربعاً يكون س$_ن$ = ص$_ن$ ، وعندها يكون : ص + ن × $\frac{ع ص}{ع ن}$ = س + ن × $\frac{ع س}{ع ن}$ ٧ + ٢ن = ١٩ – ن ⇐ ن = ٤ ثوان و منها يكون الطول = العرض س$_٤$ = ١٩ + ٤ ×(- ١) = ١٥ سم مساحة المستطيل = س × ص $\frac{ع م}{ع ن}$ = س × $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ص × $\frac{ع س}{ع ن}$ $\frac{ع م}{ع ن}$ = ١٥× ٢ + ١٥ × - ١ = ١٥ سم^٢/ ث

حل آخر:

$\frac{ع س}{ع ن}$ = - ١ سم/ث ، $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ٢ سم/ث

بعد ن من الزمن يتغير الطول والعرض الى :

س = ١٩ ← ١٨ ← ١٧ ← ١٦ ← ١٥

ص = ٧ ← ٩ ← ١١ ← ١٣ ← ١٥

أي ان المستطيل يصبح مربع بعد ٤ ثواني

مساحة المستطيل = س × ص

$\frac{ع م}{ع ن}$ = س × $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ص × $\frac{ع س}{ع ن}$

$\frac{ع م}{ع ن}$ = ١٥× ٢ + ١٥ × - ١ = ١٥ سم^٢/ ث

إجابة اختبار الوحدة:

أولا الأسئلة الموضوعية:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
البديل الصحيح	١٢	٨	١١	٢	٤٥	-٨	١	-٢	$\frac{١}{١٠}$	١	١١	٤

ثانيا الأسئلة المقالية:

رقم السؤال	الإجابة
١	$(\frac{ص}{س})_{س=٤} = \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{د(٤+هـ)-د(٤)}{هـ}$ $= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{٤+هـ+٢-٦}{هـ}$ $= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ}$ $= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} ١ = ١$ **طريقة أخرى للحل** نفرض أن (س + هـ) = ع هـ = ع – س ∴ عندما هـ ← ٠ فإن ع ← س د(س)=س+٢ ، د(ع)= ع+٢ $= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{د(ع)-د(س)}{ع-س}$ $= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع+٢-س-٢}{ع-س}$ $= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{ع-س}{ع-س} = ١$

٢	$س = \frac{ص+١}{ص-١}$ ← ① $س ص - س = ص + ١$ $س ص' + ص - ١ = ص'$ $ص'(س-١) + ص - ١ = ٠$ ← ② $ص''(س-١) + ص' + ص' - ٠ = ٠$ $(س - ١)ص'' + ٢ص' = ٠$ ← ③ بالتعويض عن ص =٢ في المعادلة ① ينتج س = ٣ بالتعويض عن ص = ٢، س =٣ في المعادلة ②ينتج $ص' = -\frac{١}{٢}$ بالتعويض عن ص =٢ ، س =٣ ، $ص' = -\frac{١}{٢}$ في المعادلة ③ينتج $ص'' = \frac{١}{٢}$ **طريقة حل أخرى:** $س = \frac{ص+١}{ص-١}$ $١ = \frac{ص'(ص-١) - ص'(ص+١)}{(ص-١)^{٢}}$ $١ = \frac{-٢ص'}{(ص-١)^{٢}}$ عند ص = ٢ ينتج $ص' = -\frac{١}{٢}$ $-٢ص' = (ص-١)^{٢}$ $-٢ص'' = ٢(ص-١) \times ص'$ بالتعويض عن ص = ٢ ، $ص' = -\frac{١}{٢}$ ينتج $ص'' = \frac{١}{٢}$

طريقة أخرى للحل

$$س = \frac{ص+١}{ص-١}$$

$$س ص - س = ص + ١ \leftarrow س ص - ص = س + ١$$

$$ص = \frac{س+١}{س-١}$$

$$ص' = \frac{١ \times (س-١) - ١ \times (س+١)}{(س-١)^{٢}}$$

$$ص' = \frac{-٢}{(س-١)^{٢}} \leftarrow ص'' = \frac{٢ \times ٢ (س-١)}{(س-١)^{٤}}$$

$$ص'' = \frac{٤}{(س-١)^{٣}}$$

عند ص= ٢ س= ٣

$$ص'' = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

طريقة حل أخرى:

$$س = \frac{ص+١}{ص-١}$$

$$س ص - س = ص + ١ \leftarrow س ص - ص = س + ١$$

$$ص + س ص' - ١ - ص' = ٠ \leftarrow ص' (س-١) = ١ - ص$$

$$ص' = \frac{١ - ص}{س - ١}$$

$$\because س = \frac{ص+١}{ص-١} \quad \therefore ص' = \frac{١ - ص}{\frac{ص+١}{ص-١} - ١}$$

$$ص' = \frac{-(ص-١)^{٢}}{٢} \quad \text{عند ص=٢} \leftarrow ص' = \frac{-١}{٢}$$

$$ص'' = \frac{١}{٢} \times ٢ (ص-١) ص'$$

$$\text{عند } ص' = -\frac{١}{٢}, ص = ٢ \leftarrow ص'' = \frac{١}{٢} \times ٢ \times -\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٣	$ص^{٢} + ٣س^{٢} = ٢٧$ $٢ص ص' + ٦س = ٠$ $ص ص' = -٣س$ $ص' = \frac{-٣س}{ص}$ ∴ المماس موازٍ لمحور الصادات عند ص = . بالتعويض في معادلة المنحنى عن ص = ٠ لإيجاد النقاط $٠ + ٣س^{٢} = ٢٧$ $س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣$ ∴ (-٣،٠) ، (٣،٠) هي النقاط التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الصادات. **طريقة أخرى للحل:** $ص^{٢} + ٣س^{٢} = ٢٧ \leftarrow \sqrt{ص^{٢}} = \sqrt{٢٧ - ٣س^{٢}}$ $ص' = \frac{-٣س}{\sqrt{٢٧-٣س^{٢}}}$ الميل غير معرف عندما $\sqrt{٢٧-٣س^{٢}} = ٠$ $\sqrt{٢٧-٣س^{٢}} = ٠ \leftarrow ٢٧ - ٣س^{٢} = ٠ \leftarrow س = \pm ٣$ بالتعويض في المعادلة تكون النقاط هي: (٣،٠) ، (-٣، ٠)
٤	أ) فترات التزايد $]-\infty، ٠] \cup [٢، \infty[$ ب) النقاط الحرجة (٠، ٢) ، (٢، -١).
٥	المسافة التي يقطعها الزورق الأول بعد ن دقيقة = ٣ ن المسافة التي يقطعها الزورق الثاني بعد ن دقيقة = ٢ ن ∴ بعد ٦ دقائق: الزورق الأول قطع ٣×٦=١٨ كم ∴ المسافة المتبقية = ٢١-١٨=٣ كم الزورق الثاني قطع ٢×٦=١٢كم ∴ المسافة المتبقية = ١٦-١٢=٤ كم ∴ البُعد بين الزورقين بعد ٦ دقائق $ف^{٢} = ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٢٥$ ∴ ف = ٥ كم لإيجاد علاقة دالة المسافة للزورقين: • بُعد الزورق الأول عن القارب بعد ن دقيقة ٢١- ٣ن • بُعد الزورق الثاني عن القارب بعد ن دقيقة ١٦-٢ن لإيجاد معدل التغيّر في المسافة بين الزورقين $ف^{٢} = (٢١-٣ن)^{٢} + (١٦-٢ن)^{٢}$ $٢ف \frac{ف}{ن} = ٢(٢١-٣ن)\times-٣ + ٢(١٦-٢ن)\times-٢$ عند ف =٥ ، ن=٦ $٢\times٥ \frac{ف}{ن} = ٢\times٣\times-٣ + ٢\times٤\times-٢$ $\frac{ف}{ن} = \frac{-٣٤}{١٠} = \frac{-١٧}{٥} = -٣,٤$ كم/ دقيقة

<table>
<tr><td>٦</td><td></td><td>
د(س) = ٢س^{٣} + ٦س^{٢} − ٩س
د′(س) = ٦س^{٢} + ١٢س − ٩
د″(س) = ١٢س + ١٢
د″(٢) = ١٢ × ٢ + ١٢ = ٣٦
</td></tr>
<tr><td>٧</td><td></td><td>
د(س) = { |١٠ − ٣س| ، س ≤ ١ ; ٢س^{٢} + ٣س + ٢ ، س > ١ }

د(س) = { −(١٠ − ٣س) ، س ≤ ١٠/٣ ; ١٠ − ٣س ، ١ ≤ س > ١٠/٣ ; ٢س^{٢} + ٣س + ٢ ، س > ١ }

د′(س) = { ٣ ، س > ١٠/٣ ; −٣ ، ١ < س > ١٠/٣ ; ٤س + ٣ ، س > ١ }
د′(س) = ٠ ← ٤س + ٣ = ٠ ← س = −٣/٤
د′(س) غير موجودة عند س = ١٠/٣ ، س = ١
−٣/٤ ، ١ ، ١٠/٣
<table>
<tr><td>اشارة د′(س)</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td><td></td></tr>
<tr><td>سلوك الدالة</td><td>↘</td><td>↗</td><td>↘</td><td>↗</td></tr>
</table>
د(١) = ٧ النقطة (١،٧) عظمى محلية
د(−٣/٤) = ٧/٨ النقطة (−٣/٤ ، ٧/٨) صغرى محلية
د(١٠/٣) = ٠ النقطة (١٠/٣ ، ٠) صغرى محلية
</td></tr>
<tr><td>٨</td><td></td><td>
نوجد نقاط التقاطع ∵ ص = ٦ − ٢س
∴ ٣٦ + س + ٦ − ٢س = ٤٠
س = ٢ ← ص = ٢

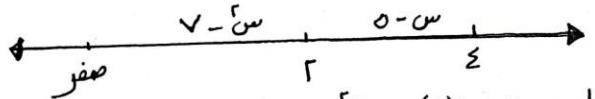
نقطة التقاطع (٢،٢)
نشتق معادلة المنحنى عند (٢،٢)
٢(٢س + ص) (٢ + ص′) + ١ + ص′ = ٠

٢٥ + ١٣ص′ = ٠ ← ص′ = −٢٥/١٣
ميل المماس ص′ = −٢٥/١٣
∴ معادلة المماس هي (ص − ٢) = −٢٥/١٣ (س − ٢)
</td></tr>
</table>

٩		$س^{٢} = ص^{٢}(١-س) \leftarrow س^{٢} = ص^{٢} - س ص^{٢}$ $٢س = ٢ص ص' - ص^{٢} - ٢ص س ص'$ $٢س + ص^{٢} = ٢ص ص'(١-س)$ $٢س + ص^{٢} = \frac{٢س^{٢} ص'}{ص}$ $ص' = \frac{٢س ص + ص^{٣}}{٢س^{٢}} \leftarrow ص' = \frac{ص}{س} + \frac{ص^{٣}}{٢س^{٢}}$
١٠		$٢ع = ا^{٢} \sqrt{ف} \leftarrow ع = \frac{ا^{٢}}{٢} \sqrt{ف}$ $ع' = ت = \frac{ا^{٢}}{٢} \times \frac{ف'}{٢\sqrt{ف}} \leftarrow ت = \frac{ا^{٢}}{٤} \times \frac{ع}{\sqrt{ف}}$ $ت = \frac{ا^{٢}}{٤} \times \frac{ا^{٢}\sqrt{ف}}{\sqrt{ف}} = \frac{ا^{٤}}{٨}$

ملحق بإجابات الأسئلة الموضوعية

م	إجابة الأسئلة الموضوعية الدرس الأول : المشتقات	الملاحظات
١	$٤ص + ٣س - ٢٤ = ٠$ $ص = -\frac{٣}{٤}س + ٢٤$ $\therefore ص' = -\frac{٣}{٤}$ $\quad \therefore د'(٣) = -\frac{٣}{٤}$ (المشتقة = ميل المماس)	أو بالمشتقات الضمني $٤ص' + ٣ = ٠$ $٤ص' = -٣$ $\therefore ص' = -\frac{٣}{٤}$
٢	$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س٢) - د(س١)}{س٢ - س١}$ $\frac{٦}{م - ١} = ٢$ $\frac{٢}{٢}(م-١) = \frac{٦}{٢} \leftarrow م - ١ = ٣ \leftarrow \therefore م = ٣ + ١ = ٤$ $س١ = ١$ $س٢ = م$ $د(س٢) - د(س١) = ٦$	
٣	متوسط معدل التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٤$ $س١ = ١$ $س٢ = ٣$ من الرسم $د(س١) = ك$ $د(س٢) = ٦$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س٢) - د(س١)}{س٢ - س١}$ $-٤ = \frac{٦ - ك}{٣ - ١} \leftarrow -٨ = ٦ - ك$ $\therefore ك = ٦ + ٨ = ١٤$	
٤	$س١ = ١ \leftarrow د(١) = ٣ - ٢ \times ١ = ١$ $س٢ = ٣ \leftarrow د(٣) = ٣ - ٢ \times ٣ = -٣$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١} = \frac{-٣ - ١}{٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$	
٥	تعريف دالة المطلق $د(س) = -٣ \mid س - ٣ \mid$ في $[١، ٢]$ (صيغة المطلق) $= -٣ \times -(س - ٣) \leftarrow \therefore د'(س) = ٣س - ٩$ $س١ = ١ \leftarrow د'(١) = ٣ \times ١ - ٩ = -٦$ $س٢ = ٢ \leftarrow د'(٢) = ٣ \times ٢ - ٩ = -٣$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د'(٢) - د'(١)}{٢ - ١} = \frac{-٣ - (-٦)}{١} = ٣$	

م	تابع الدرس الأول :: الاشتقاق	الملاحظات
٦	$س_١ = ٣ \leftarrow د(٣) = ٥$ $س_٢ = ٢ \leftarrow د(٢) = ٩$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(٣) - د(٢)}{٣ - ٢}$ $٢ = \frac{٥ - ٩}{٣ - ٢} \leftarrow \frac{٢}{٢}(٣ - ٢) = \frac{٥ - ٩}{٢}$ $\therefore ٣ - ٢ = ٢ \leftarrow \therefore ٢ = ٣ + ٢ = ٥$	
٧	$\therefore د'(س) = ٠ \leftarrow$ ميل المماس $= ٠$ $\therefore$ قاس المماس مع المحور السيني الموجب تكون منفرجة $\therefore$ عند الرسم تكون عند النقطة م	
٨	 $س_١ = ١ \leftarrow د(١) = (١)^٢ - ٧ = -٦$ $س_٢ = ٣ \leftarrow د(٣) = ٣ - ٥ = -٢$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(٣) - د(١)}{س_٢ - س_١}$ $= \frac{-٢ - (-٦)}{٣ - ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$	
٩	$س_١ = ١ \leftarrow هـ(١) = -٧$ $س_٢ = ٥ \leftarrow هـ(٥) = -٧$ $\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_٢) - د(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧ - (-٧)}{٥ - ١} =$ صفر	متوسط معدل التغير للدالة الثابتة في أي فترة دائماً يساوي صفر . (لأنه لايوجد تغير في الدالة)

م	الدرس الثاني :: قواعد الاشتقاق	الملاحظات
١	$ع(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن$ $\therefore ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ٢$ $\therefore ت(٢) = ٦ \times ٢ - ٢ = ١٢ - ٢ = ١٠$	السارع اللحظي هو مشتقة السرعة ع(ن)
٢	$ق(س) = \frac{١ + هـ(س)}{س}$ $\therefore ق'(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$ $\therefore ق'(س) = \frac{س \times هـ'(س) - (١ + هـ(س)) \times ١}{س^٢}$ بالتعويض $\therefore ق'(١) = \frac{-١ \times هـ'(١) - ١ - هـ(-١)}{١} = \frac{-٣ - ١ - ٢}{١} = \frac{-٦}{١} = -٦$	هنا قانون مشتقة $\frac{\text{دالة}}{\text{دالة}}$ - توزيع الإشارة السالبة في القوس

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع الدرس الثاني :: قواعد الاشتقاق	الملاحظات
٣	نهـا $\frac{د'(س+هـ) - د'(س)}{هـ}$ = المشتقة الثالثة لـ د(س) = $د'''(س)$ $د(س) = س^٤$ $د'(س) = ٤س^٣$ $د''(س) = ١٢س^٢$ $د'''(س) = ٢٤س$	نهـا $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$ = المشتقة الأولى للدالة
٤	$(ص \circ ع)'(س) = ص'(ع(س)) \cdot ع'(س)$ $= \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٢}$	
٥	$ف(ن) = ن^٣ - ن^٢$ ∴ ع (ن) = $ف'(ن) = ٣ن^٢ - ٢ن$ ∴ ع (٢) = $٣ \times ٢^٢ - ٢ \times ٢ = ١٢ - ٤ = ٨$	السرعة تساوي مشتقة المسافة - التعويض عن ن = ٢
٦	$ق(س) = ٥ - ٤س \times هـ(س)$ $ق'(س) =$ صفر $- ٤س \cdot هـ'(س) + هـ(س) \times -٤$ $ق'(٢) = -٤ \times ٢ \times هـ'(٢) + هـ(٢) \times -٤$ $= -٨ \times -١ + ٣ \times -٤ = ٨ - ١٢ = -٤$	- مشتقة العدد الثابت يساوي صفرًا - مشتقة حاصل ضرب دالتين - التعويض عن س = ٢
٧	نهـا $\frac{د'(س+هـ) - د'(س)}{هـ} = س^٢ + ٣س$ المشتقة الثانية للدالة ∴ $د''(س) = س^٢ + ٣س$ ∴ $د'''(س) = ٢س + ٣$ ← $د'''(١) = ٢ \times ١ + ٣ = ٥$	نهـا $\frac{د'(س+هـ) - د'(س)}{هـ} = د'''(س)$ إيجاد المشتقة الثالثة ثم التعويض
٨	$د(س) = ١ - س^٣$ $د'(س) = -٣س^٢$ $د'(٢) = -٣ \times ٢^٢ = -١٢$ نهـا $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ} = $ نهـا $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$ نهـا $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \times$ نهـا $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$ $= \frac{١}{٢} \times د'(٢) = \frac{١}{٢} \times -١٢ = -٦$	نهـا $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{٢هـ}$ $= \frac{١}{٢} \times د'(٢)$
٩	$د(س) = ٦س$ $د'(س) = ٦$ ∴ $د'(٢) = ٦$	$د'(٢)$ ← نأخذ الدالة $٣س^٢ + ٤$ ص قليل ما موضح على خط الأعداد
١٠	ميل المماس = ص' = $٢س - ١$ ∴ ص'(٢) = $٢ \times ٢ - ١ = ٤ - ١ = ٣$.	ميل المماس = المشتقة - بالتعويض عن س = ٢

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع الدرس الثاني : قواعد الاشتقاق	الملاحظات
(١١)	$ف(ن) = \frac{1}{3}ن^3 - ن^2 + 2$ $ع(ن) = ف'(ن) = \frac{1}{3} \times 3ن^2 - 2ن = ن^2 - 2ن$ $\therefore ع(ن) = 8$ $\therefore ن^2 - 2ن = 8$ $\therefore ن^2 - 2ن - 8 = 0$ $(ن - 4)(ن + 2) = 0$ $ن - 4 = 0$ ، $ن + 2 = 0$ $\therefore ن = 4$ ، $\therefore ن = -2$ مرفوضة $\therefore ن = 4$	$ع(ن) = ف'(ن)$ بالتعويض عن $ع(ن) = 8$ لإيجاد قيمة ن بتحليل المعادلة التربيعية
(١٢)	$\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{د(4+هـ) - د(4)}{هـ} = د'(4)$ $\therefore د'(4) = \frac{1}{2} \times 2 \times (4)^2$ $8 = \frac{1}{2} \times 16 \longleftarrow$ $\therefore م = \frac{8}{8} = 1$	$\text{نهـا}_{هـ \to 0} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} = د'(س)$
(١٣)	$ص = 2ن^3 - 4$ ، $س = ن^2$ ، $\therefore ن = \sqrt{س}$ نعوض عن ن $= \sqrt{س}$ $ص = 2(\sqrt{س})^3 - 4 = 2س^{\frac{3}{2}} - 4$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{3}{2} \times 2 س^{\frac{1}{2}} = 3س^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{د^2 ص}{د س^2} = 3 \times \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{س}}$ عند ن $= 2$ ، $س = ن^2 \leftarrow س = 4$ بالتعويض $\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$	حل آخر: $\frac{د ص}{د ن} = 6ن^2$ ، $\frac{د س}{د ن} = 2ن$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{6ن^2}{2ن} = 3ن$ ، لكن $ن = \sqrt{س}$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = 3\sqrt{س}$ عند $ن = 2 \leftarrow س = 4$ ، $\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{3}{2\sqrt{س}}$ $\therefore \frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$
(١٤)	$ف(ن) = 4 - (ن - 3)^2$ $\therefore ع(ن) = ف'(ن) = صفر - 2(ن - 3) \times 1 = -2(ن - 3)$ $\therefore ع(ن) = -2(ن - 3)$ بالتعويض عن $ن = 3$ $ع(3) = -2(3 - 3) = صفر$	صد الرسم المستقيم ليوازي محور السينات $\leftarrow$ الميل = صفر $\therefore$ السرعة = صفر (عند $ن = 3$)
(١٥)	$د(س) = س^2 + س \longrightarrow د'(س) = 2س + 1$ $\therefore (د \circ هـ)'(س) = د'(هـ(س)) \cdot هـ'(س)$ $= د'(س - 1) \times 1$ $= 2(س - 1) + 1 = 2س - 2 + 1$ $= 2س - 1$	
(١٦)	$ص = ل^2 - 3$ ، $ل = 5س$ نعوض عن ل في ص $\therefore ص = 5س - 3 \longrightarrow ص = 2 - س$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = -1$	

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع الدرس الثاني :: قواعد الإشتقاق	الملاحظات
(١٧)	د(١) = ٣ ، د`(١) = ٦ نهـا (هـ^٢ + ٤هـ) / (د(١+هـ) - د(١)) = نهـا هـ(هـ+٤) / (د(١+هـ) - د(١)) بأخذ ع.م.أ ∴ نهـا هـ / (د(١+هـ) - د(١)) × نهـا (هـ+٤) = ١ / د`(١) × نهـا (هـ+٤) = ١/٦ × ٤ = ٤/٦ = ٢/٣	نهـا (د(١+هـ) - د(١)) / هـ = د`(١) نوزع نهـا نعوض عن د`(١) ، هـ = ٠
(١٨)	ص = س^٢ ميل المماس = ص` = ٢س عند النقطة (س١ ، ص١) ← ميل المماس = ٢س١	- ميل المماس = المشتقة الأولى - نعوض عن س = س١
(١٩)	√ص = ١ - س بتربيع الطرفين ص = (١-س)^٢ د ص / د س = ٢ (١-س) × -١ = ٢ (-١ + س) = ٢ (س - ١)	
(٢٠)	د(س) = هـ(٢س) ، هـ(٢) = -٢ د`(س) = هـ`(٢س) × ٢ ← د`(س) = د/د س (هـ(٢س)) = هـ`(٢س) × ٢ د`(١) = هـ`(١×٢) × ٢ = هـ`(٢) × ٢ = -٢ × ٢ = -٤	مشتقة تركيب دالتين - تطبيق قواعد الإشتقاق - التعويض
(٢١)	ص = م^٣ + ٤م + ٥ ، م = ٩ - س د ص / د س = د ص / د م × د م / د س د ص / د س = (٣م^٢ + ٤) × -١ ← ∴ د ص / د س عندما م = ١ = -(٣×١^٢ + ٤) × ١ = -٧	نوجد د ص / د م ، د م / د س - نعوض عن م = ١
(٢٢)	د`(٢) = نهـا (د(٢+هـ) - د(٢)) / هـ = د ص / د س نعوض عن س = ٢ = (١٢هـ + ٦هـ^٢ + ١٦هـ + هـ^٣) / هـ = هـ(١٢ + ٦هـ + ١٦ + هـ^٢) / هـ ∴ نهـا د ص / د س = نهـا ١٢ + ٦هـ + ١٦ + هـ^٢ = ١٢ + ١٦ = ٢٨	نأخذ عامل مشترك نعوض عن هـ = صفر

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع الدرس الثاني :: قواعد الاشتقاق	الملاحظات
(٢٣)	ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} - ٢٧ن + ٣ ف'(ن) = ٣ن^{٢} - ١٨ن - ٢٧ ∴ معدل التغير في السرعة = ف''(ن) = ٦ن - ١٨ = ف''(٤) = ٤×٦ - ١٨ = ٦	السرعة = معدل التغير في المسافة = ف'(ن) التسارع = معدل التغير في السرعة = ع'(ن) = ف''(ن)
(٢٤)	ق(س) = ٣س^{٢} + ٣ ← ق'(س) = ٦س ق'(-٢) = ٦×-٢ = -١٢ (و ○ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) × هـ'(١) ٢٠ = ق'(-٢) × ٥ ∴ ق'(-٢) = ٢٠/٥ = ٤ ، لكن ق'(-٢) = -٤م ⇐ -٤م = ٤ ← م = ٤/-٤ = -١	مشتقة تركيب دالتين نعوض عن ق'(-٢) في المعادلة لإيجاد قيمة م
(٢٥)	ل(٢س) = س × هـ(س) مشتقة حاصل ضرب دالتين نشتق ← ل'(٢س)×٢ = س × هـ'(س) + هـ(س) × ١ نعوض عن س = -١ ل'(٢×-١)×٢ = -١ × هـ'(-١) + هـ(-١) [١] ∵ ل(٢س) = س × هـ(س) هـ(س) = ل(٢س)/س ∴ هـ(-١) = ل(-٢)/-١ = ٣/-١ = -٣ نعوض في [١] ∴ ل'(-٢)×٢ = -١ × هـ'(-١) + هـ(-١) ٣ × ٢ = -هـ'(-١) - ٣ ٦ + ٣ = -هـ'(-١) ← ∴ هـ'(-١) = -٩	
(٢٦)	ق'(٣) = -٨ ، نهـا ق(٣+هـ) - ق(٣) / ٧هـ = ١/٧ × نهـا ق(٣+هـ) - ق(٣) / هـ = ١/٧ × ق'(٣) = ١/٧ × -٨ = -٨/٧	نعوض عن ق'(٣)

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

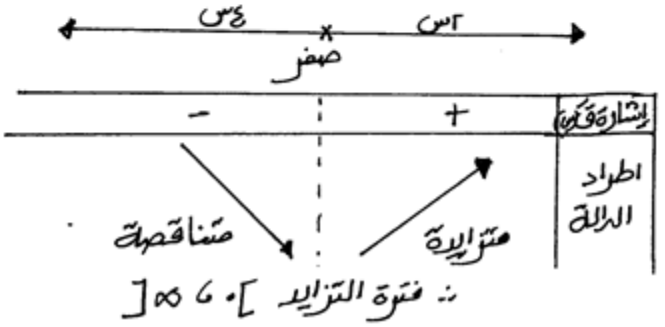
م	تابع الدرس الثاني: قواعد الإشتقاق	الملاحظات
(٢٧)	ف(ن) = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٣٤ ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} - ١٢ن ت(ن) = ف''(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ١٢ عندما ينعدم التسارع يعني ت(ن) = ٠ ٦ن - ١٢ = ٠ ← ن = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢ ∴ المسافة التي يقطعها الجسيم عندما ن = ٢ ف(ن) = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ٣٤ ف(٢) = ٢^{٣} - ٦×٢^{٢} + ٣٤ = ١٨	ع(ن) = ف'(ن) ت(ن) = ف''(ن) = ع'(ن) بالتعويض عن ن = ٢
(٢٨)	ق(س) = س^{٢} + س (هـ ٥ ق)'(٢) = هـ'(ق(٢)) × ق'(٢) ق(٢) = ٢^{٢} + ٢ = ٦ ق'(س) = ٢س + ١ ∴ ق'(٢) = ٢×٢ + ١ = ٥ ∴ (هـ ٥ ق)'(٢) = هـ'(ق(٢)) × ق'(٢) ٥٥ = هـ'(٦) × ٥ ∴ هـ'(٦) = $\frac{٥٥}{٥}$ = ١١	
(٢٩)	د(س) = ٣س^{٤} - ٥س^{٢} + ٦ د'(س) = ٤٣س^{٣} - ١٠س د''(س) = ١٢٣س^{٢} - ١٠ د''(س) = ٤٢٣س = نها $\frac{د'(٢+هـ) - د'(٢)}{هـ}$ = ٤٨ ∴ ٤٨ = ٤٢٣س ٤٨ = ٤×٣×٢ ← ∴ م = $\frac{٤٨}{٤٨}$ = ١	د''(٢) = نها $\frac{د'(٢+هـ) - د'(٢)}{هـ}$ = المشتقة الثانية عندس = م
(٣٠)	ق(س) = م ٤^{س} ، م عدد حقيقي ثابت وليس متغير ق'(س) = ٤م ٤^{س} ق''(س) = ٤^{٢}م ٤^{س}	نشتق المرة الأولى نشتق المرة الثانية

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع الدرس الثاني :: قواعد الإشتقاق	الملاحظات
(٣١)	د(س) = س٢ + ١ ، ∴ (د ○ د)′(-١) = د′(د(-١)) . د′(-١) د′(س) = ٢س د′(-١) = -٢ د(-١) = ٢ ∴ المطلوب = د′(٢) × -٢ = -٤ × ٢ = -٨	
(٣٢)	٣ (ع(ن))٢ = ٥ ف(ن) + ٤ نشتق :. ٦ ع(ن) × ع′(ن) = ٥ ع′(ن) ∴ ع′(ن) = ٥ ع′(ن) / ٦ ع(ن) = ٥/٦ ∴ ع′(ن) = تسارع الجسيم = ٥/٦	ف′(ن) = ع(ن) ع′(ن) = ت(ن)
(٣٣)	ص = (٣س + ١)٢ ص′س = ٢ (٣س + ١) × ٣ = ٦ (٣س + ١)	
(٣٤)	ميل العمودي على المماس = -١/م الميل عند النقطة (١، ٠) ← د(س) = س٣ - س ميل المماس = د′(س) = ٣س٢ - ١ د′(١) = ٣ × ١٢ - ١ = ١ ∴ ميل العمودي على المماس = -١/١ = -١	م١ × م٢ = -١ ∴ ميل العمودي = -١/م - نعوض عن س = ١ - نعوض عن م = ١

م	الدرس الثالث :: المعادلات الزمنية المرتبطة و تطبيقات القيم القصوى	
(١)	د(س) = ٣ - (س - ٢)٢ د′(س) = -٢(س - ٢) د′(س) = ٠ ← -٢(س - ٢) = ٠ ← -٢س + ٤ = ٠ ∴ س = ٢ د(-١) = ٣ - (-١ - ٢)٢ = ٣ - ٩ = -٦ د(٣) = ٣ - (٣ - ٢)٢ = ٢ د(٢) = ٣ - (٢ - ٢)٢ = ٣ ∴ عند د(٣) توجد قيمة عظمى مطلقة لأنها أكبر قيمة	نوجد د(س) في الفترة [-١ ، ٣] بداية الفترة ، نهايتها وعند س = ٢ (النقطة الحرجة) أعلى قيمة عند هذه النقاط هي قيمة عظمى مطلقة.

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة

م	تابع المعادلات الزمنية المرتبطة والقيم القصوى	الملاحظات
②	$د(س) = (س-٢)^{٢} + ٢$ $د'(س) = ٢(س-٢)$ $د'(س) = ٠ \Leftarrow ٢(س-٢) = ٠$ ومنها $س = ٢$ (النقطة الحرجة) $\therefore د(٢) = (٢-٢)^{٢} + ٢ = ٢$ $د(١) = (١-٢)^{٢} + ٢ = ٩ + ٢ = ١١$ $د(٣) = (٣-٢)^{٢} + ٢ = ١ + ٢ = ٣$ $\therefore$ عندس = ٢ توجد قيمة صغرى محلية	توجد $د(س)$ عند النقطة $س = ٢$ وبداية الفترة ونهايتها $[١، ٣]$ أقل قيمة لهذه النقاط تسمى قيمة صغرى محلية
③	$\frac{ح نق}{ح ن} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ح م}{ح ن} = ؟$ ، $نق = ٢$ مساحة الدائرة $= \pi نق^{٢}$ $\frac{ح م}{ح ن} = ٢\pi نق \frac{ح نق}{ح ن}$ $= ٢\pi \times ٤ \times \frac{١}{٤} = ٢\pi$	
④	$ص = س^{٣} + ٣س + ٢$ ، $ل = س^{٢} - ١$ $\frac{ح ص}{ح ل} = \frac{ح ص}{ح س} \times \frac{ح س}{ح ل}$ $= (٣س^{٢} + ٣) \times \frac{١}{٢س}$ $\Leftarrow$ عندس = ١ $= \frac{٣ + ٣}{٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$	نشتق ثم نعوض عن $س = ١$
⑤	$د(س) = \frac{س}{س+١}$ ، $س \neq -١$ $د'(س) = \frac{١ \times (س+١) - س \times ١}{(س+١)^{٢}} = \frac{س+١-س}{(س+١)^{٢}} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$ $(س+١)^{٢}$ دائماً أكبر من الصفر > ٠ $\therefore$ لا يوجد نقاط حرجة	مشتقة حاصل قسمة دالتين النقاط الحرجة إما : ① $د'(س) = ٠ \Leftarrow$ البسط $= ٠$ وفي هذا السؤال لا يمكن ② $د'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow$ المقام $= ٠$ $(س+١)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = -١$ لكنه محظور $س \neq -١$
⑥	$ق(س) = \begin{cases} ٣س & ، س > ٠ \\ ٤س & ، س \leq ٠ \end{cases}$  $\therefore$ فترة التزايد $]٠، ٥\infty[$	نعوض في $ق'(س)$ بقيمة في الفترة المحددة ونوجد إشارة اطراد الدالة موجبة أم سالبة

م	تابع المعدلات الزمنية المرتبطة والقيم القصوى	الملاحظات
⑦	د(س) = $\frac{س}{س-٢}$ ، س ∈ [-٢، ١[د'(س) = $\frac{(س-٢)\times ١ - س}{(س-٢)^{٢}} = \frac{س-٢-س}{(س-٢)^{٢}} = \frac{-٢}{(س-٢)^{٢}}$ د(-٢) = $\frac{-٢}{-٢-٢} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$ د(١) = $\frac{١}{١-} = -١$ ∴ عند س = (١) توجد قيمة صغرى مطلقة	* القيم المطلقة توجد إما عند النقاط الحرجة أو طرفي الفترة . * لا توجد نقاط حرجة للدالة في الفترة المعطاة لأنه : ① د'(س) ≠ ٠ ② د'(س) موجودة دائماً في هذه الفترة (صفر المقام ∉ الفترة) - نقوض عن بداية ونهاية الفترة ، فتوجد قيمة عظمى مطلقة عند أقل قيمة صغرى محلية
⑧	النقاط الحرجة عند د'(س) = صفر أو د'(س) غير موجودة ∴ عند س = ٢ ، -٢ ، أصفار المقام س = ٠ ∴ {-٢، ٠، ٢}	س^{٢} - ٤ = ٠ ∴ س = ± ٢
⑨	د(س) = ٢(س - ٥) د'(س) = ٢ دالة ثابتة ، ∴ لا توجد نقاط حرجة ∴ عدد النقاط الحرجة = صفر	د'(س) = ٠ ٢ = ٠ لا يمكن
⑩	ق(٣) = ٤ صد الرسم ∴ النقطة (٣ ، ق(٣)) هي (٣ ، ٤) صد الرسم تسمى قيمة عظمى محلية	القيم العظمى المحلية تكون بين الفترات أما القيم العظمى المطلقة بين الفترات وعند بداية ونهاية الفترة
⑪	ق(س) = س^{٣} + هـ(س) ∴ يوجد قيمة قصوى محلية عند س = -٢ ∴ قَ(-٢) = صفر قَ(س) = ٣س^{٢} + هَ(س) قَ(-٢) = ٣ × -٢^{٢} + هَ(-٢) ٠ = ١٢ + هَ(-٢) ← ∴ هَ(-٢) = -١٢	
⑫	من الرسم : د(س) متناقصة في الفترة]-∞ ، ٠[وهي صد الدرجة الثانية ∴ دَ(س) إشارتها سالبة في]-∞ ، ٠[وهي صد الدرجة الأولى وفي الفترة [٠ ، ∞[← د(س) متناقصة وخطية ∴ إشارة دَ(س) سالبة في]٠ ، ∞[وهي ثابتة	ملاحظة ص ٨٣ صد الكتاب المدرسي في كتابة الفترات للدالة والمشتقة

م	تتابع المعدلات الزمنية المرتبطة والقيم القصوى	الملاحظات
(١٣)	من الرسم القيمة العظمى المطلقة عند س = ٣ ∴ القيمة العظمى المطلقة = صفر	
(١٤)	ص = س^{٢} + ٣س − ٤ بالاشتقاق بالنسبة للزمن $\frac{د ص}{د ن} = ٢س \cdot \frac{د س}{د ن} + ٣ \times \frac{د س}{د ن}$ ، $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د س}{د ن}$ (معطى) $\frac{د ص}{د ن} - ٢س \times \frac{د ص}{د ن} - ٣ \times \frac{د ص}{د ن} = ٠$ نأخذ ع.م.أ $\frac{د ص}{د ن}[١ - ٢س - ٣] = ٠$ ١ − ٢س = ٠ ← س = −١ نعوض في ص = س^{٢} + ٣س − ٤ عند س = −١ ∴ ص = (−١)^{٢} + ٣ × −١ − ٤ = ١ − ٣ − ٤ = −٦	$\frac{د ص}{د ن} = \frac{د س}{د ن}$
م	إجابة اختبار الوحدة	الملاحظات
(١)	$\frac{د س}{د ص} = \frac{د(٢) - د(١)}{٢ - ١} = \frac{(٤ \times ٢^{٢} - ١) - (٤ \times ١^{٢} - ١)}{٢ - ١}$ $= \frac{٣١ - ١٥}{١} = ١٦$	
(٢)	د(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} د′(س) = ٣س^{٢} − ٤س د″(س) = ٦س − ٤ ∴ د″(٢) = ٦ × ٢ − ٤ = ١٢ − ٤ = ٨	
(٣)	ف(ن) = ن^{٢} + ٥ن ع(ن) = ف′(ن) = ٢ن + ٥ ∴ ع(٣) = ٢ × ٣ + ٥ = ١١	ع(ن) = ف′(ن)
(٤)	ص = ٤س − س^{٢} ، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع ع = الإحداثي الصادي للنقطة جـ (التي تقع على المنحنى) ق = فرق الإحداثيين للنقطتين ب ، أ وتحقق معادلته) لإيجاد أ ، ب ← نقاط تقاطع المنحنى مع س ٤س − س^{٢} = ٠ ← س(٤ − س) = ٠ ← س = ٠ أو س = ٤ ∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × (٤س − س^{٢}) ← الإحداثي الصادي لجـ م(س) = ٨س − ٢س^{٢} م′(س) = ٨ − ٤س ← تابع الحل	

م	تابع إجابة إختبار الوحدة	الملاحظات
تابع ④	م′(س) = ٠ ∴ ٨ - ٤س = ٠ ← س = ٢ م″(س) = - ٤ ∴ م″(٢) = -٤ < ٠ ← قيمة عظمى ∴ توجد قيمة عظمى محلية عند س = ٢ وهي أكبر مساحة للمثلث	
⑤	ع(س) = (٣س + ٢) × ق′(س) بالإشتقاق حاصل ضرب دالتين ع′(س) = (٣س + ٢) × ق″(س) + ق′(س) × ٣ بالتعويض: ع′(١) = (٣ × ١ + ٢) × ٦ + ٣ × ٥ = ٣٠ + ١٥ = ٤٥	
⑥	ق(س٣) = (٢ + ل) س٢ بالإشتقاق ق′(س٣) × ٣س٢ = ٢ (٢ + ل) س ق′(١) × ٣ × ١ = ٢ (٢ + ل) × ١ - ٤ × ٣ = ٢ (٢ + ل) $\frac{-١٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ (٢ + ل) ← - ٦ = ٢ + ل ∴ ل = - ٦ - ٢ = - ٨	
⑦	∵ متوسط معدل التغير دائماً = ٣ ومتوسط معدل التغير هو المشتقة الأولى والمشتقة عدد ← يعني الدالة من الدرجة الأولى ∴ ن = ١	
⑧	ص = س + ٤ مماس ← ∴ هـ′(١) = ميل المماس = ١ نقطة التماس هي نقطة مشتركة بين المماس والمنحنى فيكون هـ(س) = ص عند هذه النقطة ، أي أن هـ(١) = ١ + ٤ = ٥ $ق'(س) = \frac{٣س هـ'(س) - هـ(س) × ٢}{٤س^{٢}}$ $ق'(١) = \frac{٣ × ١^{٢} × هـ'(١) - هـ(١) × ٢}{٤ × ١^{٢}}$ $= \frac{٣ × ١ - ٥ × ٢}{٤} = \frac{-٨}{٤} = -٢$ ملاحظة: عندس = ١ ← ص = ١ + ٤ = ٥ ∴ (١، ٥) نقطة تقاطع المستقيم مع هـ(س)	مشتقة حاصل قسمة دالتين عندس = ١، ص = ٥ ∈ هـ(س)

٢	تابع إجابة الوحدة	الملاحظات
٩	مكعب طول ضلعه ٢ م $\frac{ع}{ن} = ٤٠\pi^{٣}$ م/ث الجسم الذي سيشكله الماء أثناء عملية ملء الخزان هو متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ع ∴ حجم متوازي المستطيلات = ٤ع = مساحة القاعدة × الارتفاع ح = ٤ع بالاشتقاق الضمني بالنسبة للزمن $\frac{ح}{ن} = ٤ \times \frac{ع}{ن}$ $٤٠\pi = ٤ \times \frac{ع}{ن}$ ∴ $\frac{ع}{ن} = \frac{٤٠\pi}{٤} =$ او م/ث $= \frac{١}{١٠}$ م/ث	حجم المكعب = (طول الضلع)^{٣} $= ل^{٣}$ حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع = مساحة القاعدة × الارتفاع
١٠	$د(س) = ٤س^{٢} + \frac{م}{س}$ $د(س) = ٤س^{٢} + م س^{-١}$ بالاشتقاق $د'(س) = ٨س - م س^{-٢}$ ، ∵ عندس = $\frac{١}{٢}$ نقطة حرجة $د'(\frac{١}{٢}) = ٨ \times \frac{١}{٢} - \frac{م}{(\frac{١}{٢})^{٢}} = ٠$ ∴ $د'(\frac{١}{٢}) = ٠$ $٤ - م \times ٤ = ٠$ ⟸ $م \times ٤ = ٤$ ⟸ ∴ $م = ١$	$\frac{١}{س} = س^{-١}$ $د'(س) = ٨س - \frac{م}{س^{٢}}$
١١	$د(س) = ٣س^{٢} + ١$ ، $ع(س) = س + ١$ $ل(س) = د(س) \times ع(س)$ ∴ $ل(س) = (٣س^{٢}+١) \times (س+١)$ $ل'(س) = (٣س^{٢}+١) \times ١ + ٤س(س+١)$ $ل'(س) = ٣س^{٢} + ١ + ٤س^{٢} + ٤س$ $= ٧س^{٢} + ٤س + ١$ ∴ $ل'(١) = ٧ \times ١^{٢} + ٤ \times ١ + ١ = ٧ + ٤ + ١ = ١٢$	نفوض عن د(س) ، ع(س) نشتق حاصل ضرب دالتين نجمع الحدود المتشابهة نفوض عن س = ١
١٣	$ع(ص) = \frac{١}{م}\sqrt{٢م س + ٤}$ ، $هـ(١) = ٣$ ، $هـ'(١) = ٢$ ، $(ع \circ هـ)'(١) = \frac{١}{٤}$ م ، $٤ = ؟$ $ع'(س) = \frac{١}{\sqrt{٢م س + ٤}}$ ، $(ع \circ هـ)'(س) = ع'(هـ(س)) \times هـ'(س)$ $\Leftarrow (ع \circ هـ)'(س) = \frac{هـ'(س)}{\sqrt{٢م \times هـ(س) + ٤}}$ بالتالي: $(ع \circ هـ)'(١) = \frac{هـ'(١)}{\sqrt{٢م \times هـ(١) + ٤}}$ $\Leftarrow \frac{٢}{\sqrt{٢م \times ٣ + ٤}} = \frac{١}{٤}$ (بالضرب بالتبادلي) $٤ = \sqrt{٦م + ٤}$ (بتربيع الطرفين) $١٦ = ٦م + ٤ \Leftarrow ٦م = ١٢ \Leftarrow م = ٢$ ⟸ تابع	بالتعويض عند المعطيات

مشروع كراسة الطالب التدريبية في الرياضيات - الفصل الدراسي الأول - وحدة الرياضيات بتعليمية شمال الباطنة